Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8. Dezember 2005

a) Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,! \qquad \text{Ist} \quad \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,?$$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\varphi(t)}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(t)\,dt$$

läßt sich nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung auch schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \frac{\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)}{a}\varphi(\tau) = \varphi(\tau)$$

für ein geeignetes $\tau \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$; für $a \to 0$ geht $\tau \to 0$, also der Wert des Integrals gegen $\varphi(0)$. Genau das ist auch der Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

b) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \ge 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,! \qquad \text{Ist} \quad \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,?$$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{0}^{\frac{a}{2}} dt - \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

unabhängig von a. Damit verschwindet auch der Limes für $a \to 0$.

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt$ mit einem unstetigen f würden die meisten Mathematiker nicht für sinnvoll halten; Ingenieure haben weniger Hemmungen und schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt = f(0) = 1\,,$$

was offensichtlich nicht gleich dem Limes der linken Seite ist. Gelegentlich definiert man das Integral auch als Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Limes von $f(t)$ für $t \to 0$; mit dieser Interpretation stimmt die Formel.

c) Berechnen Sie für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:

$f_1(t) = \sin t, \qquad f_2(t) = \sin^2 t, \qquad f_3(t) = 5t + 7, \qquad f_4(t) = e^t$

Lösung:

$$(f_1 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-s)\,ds = \cos(t-\pi) - \cos(t+\pi) = 0$$

$$\begin{aligned}(f_2 * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t-s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}\big(\sin(t-s)\cos(t-s) - (t-s)\big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\big(-(t-\pi) + (t+\pi)\big) = \pi\end{aligned}$$

$$(f_3 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(5(t-s)+7\big)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \big(5(t-s)+7\big)\,ds = 10\pi t + 14\pi$$

$$(f_4 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-s}g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} e^{t-s}\,ds = e^{t+\pi} - e^{t-\pi} = e^t(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

Die ersten beiden Werte hätte man auch ohne Rechnung bekommen: Faltung mit g integriert eine Funktion über das Intervall der Länge 2π mit dem betrachteten Wert als Mittelpunkt. Für den Sinus ist dieses Intervall ein volles Periodenintervall, das Integral also Null. Wird $f_2(t) = \sin^2 t$ über ein Intervall der Länge 2π integriert, hat man zwei volle Perionen; das Integral hat offensichtlich denselben Wert wie das über $\cos^2$. Da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist, ist die Summe der beiden Werte 2π, jeder einzelne also π.

d) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $\big(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})\big) * \sin t$ und $\big(\delta(t) + \delta(t-\pi)\big) * \sin t$!

Lösung:

$$\Big(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})\Big) * \sin t = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t-s) + \delta(t - \tfrac{\pi}{2} - s)\big)\sin s\,ds = \sin t + \sin(t - \tfrac{\pi}{2}) = \sin t - \cos t$$

$$\big(\delta(t) + \delta(t-\pi)\big) * \sin t = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t-s) + \delta(t-\pi-s)\big)\sin s\,ds = \sin t + \sin(t-\pi) = 0$$

e) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

Lösung: $f(\omega)$ ist die FOURIER-Transformierte von $g(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$; da g quadratintegrierbar ist, ist es nach dem Satz von PARSEVAL auch f.

f) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$?

Lösung: Wieder nach PARSEVAL ist mit obigen Bezeichnungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \|f\|_2^2 = 2\pi\|g\|_2^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2\,dt = \pi\,.$$

g) Zeigen Sie, daß die Frequenzabschätzung aus dem Satz von NYQUIST scharf ist!

Lösung: Man betrachte das Beispiel $\sin \Omega t$ mit Abtastung bei den Nullstellen.

h) Berechnen Sie das Faltungsprodukt von $f(x,y) = \sin x \cos y$ mit der zweidimensionalen Distribution $g(x,y) = \big(\delta(x+\frac{\pi}{2}) + \delta(x-\frac{\pi}{2})\big)\big(\delta(y+\frac{\pi}{2}) - \delta(y-\frac{\pi}{2})\big)$!

Lösung: Da Integration linear ist und jeder der beiden Faktoren von g nur von einer der beiden Integrationsvariablen abhängt, können wir ausmultiplizieren und nacheinander die vier zweidimensionalen Distributionen $\delta(x \pm \frac{\pi}{2}) \cdot \delta(x \pm \frac{\pi}{2})$ mit f falten. Die entsprechenden Faltungsintegrale sind

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) \cdot \left(\delta\left(u \pm \frac{\pi}{2}\right)\delta\left(v \pm \frac{\pi}{2}\right)\right) du\, dv = f\left(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$ und $\cos\left(y \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin y$ ist $f\left(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \sin y$, wobei rechts genau dann ein Pluszeichen steht, wenn links *verschiedene* Vorzeichen stehen. Das Produkt

$$g(x,y) = \delta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(y+\frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(y+\frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$$

führt also insgesamt zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) g(u,v)\, du\, dv = -\cos x \sin y - \cos x \sin y + \cos x \sin y + \cos x \sin y = 0.$$

i) Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und einer Konstanten $\Omega > 0$ eine Funktion g mit der Eigenschaft, daß $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ ist für $|\omega| \le \Omega$ und $\widehat{g}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$!

Lösung: $h(\omega)$ sei der Rechteckimpuls mit der Eigenschaft, daß $h(\omega) = 1$ ist für $|\omega| \le \Omega$ und $h(\omega) = 0$ sonst. Dann soll also gelten $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot h(\omega)$. Also ist die FOURIER-Transformierte der gesuchten Funktion das Produkt der FOURIER-Transformierten von f und $\check{h}$, d.h. $g = f * \check{h}$ ist die Faltung von f mit $\check{h}$. Dabei ist

$$\check{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\Omega t} - e^{i\Omega t}}{it} = -\frac{\sin \Omega t}{\pi t}.$$

j) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{2N+1} \delta\Big(t - \big(\frac{2N+1}{2} - k\big)\, d\Big)$!

Lösung:

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{2N+1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \left(\frac{2N+1}{2} - k\right) d\right) dt = \sum_{k=0}^{2N+1} e^{i\omega\left(\frac{2N+1}{2} - k\right)d} = e^{i\omega \frac{2N+1}{2} d} \sum_{k=0}^{2N+1} e^{-i\omega k d}$$

$$= e^{i\omega \frac{2N+1}{2} d} \sum_{k=0}^{2N+1} \left(e^{-i\omega d}\right)^k = e^{i\omega \frac{2N+1}{2} d} \frac{1 - e^{-i\omega d(2N+2)}}{1 - e^{-i\omega d}} = \frac{e^{i\omega(N+1)d}}{e^{i\omega \frac{d}{2}}} \frac{1 - e^{-i\omega d(2N+2)}}{1 - e^{-i\omega d}}$$

$$= \frac{e^{i\omega(N+1)d} - e^{-i\omega(N+1)d}}{e^{i\omega \frac{d}{2}} - e^{i\omega \frac{d}{2}}} = \frac{\sin(N+1)\omega d}{\sin \omega \frac{d}{2}}.$$

k) Sei nun $a < \frac{d}{2}$ eine Konstante und $g(t) = 1$, falls es eine eine ganze Zahl $0 \le k \le 2N+1$ gibt, so daß $\left|t - \left(\frac{2N+1}{2} - k\right) d\right| \le \frac{a}{2}$ ist; ansonsten sei $g(t) = 0$. Berechnen Sie auch die FOURIER-Transformierte von g!

Lösung: g ist die Faltung der gerade betrachteten Funktion f mit einem Rechteckimpuls der Breite a, also ist $\widehat{g}(\omega)$ das Produkt von $\widehat{f}(\omega)$ mit dessen FOURIER-Transformierter

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega t}\,dt = -\frac{e^{-i\omega a/2} - e^{-\omega a/2}}{i\omega} = 2\frac{\sin \omega \frac{a}{2}}{\omega},$$

d.h.

$$\widehat{g}(\omega) = 2\frac{\sin(N+1)\omega d}{\sin \omega \frac{d}{2}} \cdot \frac{\sin \omega \frac{a}{2}}{\omega}.$$

l) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

Lösung: Man kann natürlich ausmultiplizieren und die allgemeine Formel aus der Vorlesung anwenden; einfacher ist es aber, die Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ zu betrachten. Diese hat dieselbe Ableitung wie $w(t)$, genügt also der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit Lösung} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}.$$

Also ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Integrationskonstante C so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist, d.h. $C = 1 - \beta$.

m) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

Lösung: In diesem Fall ist C gleich 90% und $w(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma} = 0{,}6 \Longrightarrow e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \Longrightarrow \gamma = -\ln\frac{5}{9} \approx 0{,}5877866648.$$

Mithin ist $w(\frac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}} = 0{,}1 + 0{,}9e^{\ln\sqrt{\frac{5}{9}}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt{\frac{5}{9}} \approx 0{,}7708203933$ ungefähr 77%. Er hat also bis zum Wiederholungstermin etwa 23% des Stoffs vergessen. Alternativ, ohne Berechnung von γ: $w(\frac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma/2} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt{e^{-\gamma}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt{\frac{5}{9}}$.

n) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\text{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

Lösung: Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinstmöglichen Zeiteinheit von 1/16 Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.

Der Seminarraum enthält $V = 40\,\mathrm{m}^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil zur (in Minuten gemessenen) Zeit t gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden

$$30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$$

Liter Luft eingeatmet; da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$ des Gesamtvolumens. Vorher war die Sauerstoffmenge $y(t)V$; nachher ist sie

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V\,,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$\dot{y}(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000}} y(t)\,.$$

Die Integrationskonstante ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5} e^{-\frac{12 \cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5} e^{-\frac{108}{1000}} \approx 0{,}1795255193\,.$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

o) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

Lösung: Da $y(t)$ stetig differenzierbar ist, ist $\dot{y}(t)$ stetig, muß also entweder konstant gleich eins oder konstant gleich minus eins sein. Damit gibt es die beiden Lösungsklassen $y(t) = \pm t + C$; die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ erfüllen

$$y(t) = t - 1 \quad \text{und} \quad y(t) = -t + 1\,.$$