Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24. November 2005

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = \sin a, \quad \dot{x}(0) = \cos a$$

via Laplace-Transformation und beweisen Sie so die Additionsformel für $\sin(t + a)$!

b) Wie kann man auf ähnliche Weise die Additionsformel für den Kosinus herleiten?

c) Laut Vorlesung ist $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung jene Stammfunktion $F(t)$ von $f(t) = t^n$, für die $F(0) = a$ ist!

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$ und $y(0) = c$ mit Hilfe von Laplace-Transformationen!

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - 16y(t) = 0$ mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\ddot{y}(0) = 3$ und $y^{(3)}(0) = 0$ mit Hilfe einer Tabelle von Laplace-Transformationen!

f) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ und $\ddot{y}(0) = 0$!

g) Bestimmen Sie *alle* Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 4y(t) = 6\cos t$!

h) Finden Sie eine Funktion $f(t)$ mit $L\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$!

i) Finden Sie eine Funktion $f(t)$ mit $L\{f(t)\}(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s^2+1)}$!

j) Leiten Sie die Laplace-Transformierte $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ von $\cos\omega t$ ab nach s und benutzen Sie das Ergebnis zur Konstruktion einer Funktion $f(t)$ mit $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$!

k) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ ist stark abfallend.

l) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = \dfrac{1}{\cosh t}$ ist stark abfallend.

m) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ ist stark abfallend.

n) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = te^{-t}$ ist stark abfallend.

o) *Richtig oder falsch:* Die Summe zweier stark abfallender Funktionen ist wieder stark abfallend.

p) *Richtig oder falsch:* Ist f stark abfallend, so auch jede Potenz f^n mit $n \in \mathbb{N}$.

q) Welche periodischen Funktionen sind stark abfallend?

r) *Richtig oder falsch:* Wenn die Fourier-Transformierte von $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert, ist f stark abfallend.