Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17. November 2005

a) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = |\sin t|$ ist linear unabhängig von den Funktionen $1, \cos kt, \sin \ell t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Lösung: *Richtig,* denn sonst wäre sie ein trigonometrisches Polynom. Wie wir gesehen haben, treten in ihrer Fourier-Reihe aber unendlich viele nichtverschwindende Koeffizienten auf. (Andere Begründung: Trigonometrische Polynome sind stetig differenzierbar, f aber nicht.)

b) *Richtig oder falsch:* Die Funktionen $1, \cos kt, \sin \ell t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für $L_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lösung: *Falsch,* denn wie wir aus der Vorlesung wissen, ist

$$(\cos k\ell,\ \cos k\ell) = (\sin \ell t,\ \sin \ell t) = \frac{1}{2} \neq 1\,.$$

c) *Richtig oder falsch:* Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, so auch $\widehat{f}(\omega)$.

Lösung: *Richtig,* denn mit der Substitution $s = -t$ und $dt = -ds$ ist

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-s)e^{-i\omega s}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds = \widehat{f}(\omega)\,.$$

d) *Richtig oder falsch:* Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, so auch $\widehat{f}(\omega)$.

Lösung: *Richtig,* denn mit der Substitution $s = -t$ und $dt = -ds$ ist

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-s)e^{-i\omega s}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} -f(s)e^{-i\omega s}\,ds = -\widehat{f}(\omega)\,.$$

e) *Richtig oder falsch:* Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, so auch $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

Lösung: *Falsch,* denn da $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ nur von den Funktionswerten $f(t)$ mit $t \geq 0$ abhängt, haben

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ f(-t) & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ -f(-t) & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

dieselbe Laplace-Transformierte, aber die eine ist gerade, die andere ungerade. Explizites Gegenbeispiel: $\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ ist ungerade.

f) *Richtig oder falsch:* Ist $f(t)$ eine ungerade Funktion, so auch $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Lösung: *Falsch* aus demselben Grund. Explizites Gegenbeispiel hier: $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ ist gerade.

g) Berechnen Sie die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad !$$

Lösung: LAPLACE-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^1 (1-t)e^{-st}\,dt\,.$$

Partielle Integration führt auf

$$\int (1-t)e^{-st}\,dt = -\frac{1-t}{s}e^{-st} - \int \frac{-e^{-st}}{-s}\,dt = \frac{t-1}{s}e^{-st} + \frac{e^{-st}}{s^2}\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}-1}{s^2} = \frac{e^{-s}+s-1}{s^2}\,.$$

FOURIER-Transformierte:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^1 (1-t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Die obige partielle Integration führt für $s = i\omega$ auf

$$\int (1-t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{t-1}{i\omega}e^{-i\omega t} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} = \frac{i(1-t)}{\omega}e^{-i\omega t} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}$$

und ganz entsprechend erhalten wir

$$\int (1+t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{-t-1}{i\omega}e^{-i\omega t} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} = \frac{i(t+1)}{\omega}e^{-i\omega t} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\,.$$

Auswertung des ersten Integrals an den Stellen 1 und 0 sowie des zweiten an den Stellen 0 und -1 führt auf

$$\widehat{f}(\omega) = -\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} = \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}\,.$$

h) Berechnen Sie die FOURIER- und die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad !$$

Lösung: Hier kann man entweder mit zweimaliger partieller Integration arbeiten oder mit den EULERschen Formeln. Nach letzteren ist

$$\sin t \cdot e^{-st} = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)e^{-st} = \frac{1}{2i}\left(e^{(i-s)t} - e^{-(i+s)t}\right),$$

eine Stammfunktion dazu ist also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} + \frac{e^{-(i+s)t}}{i+s}\right) &= \frac{1}{2i}\,\frac{i\big(e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t}\big) + s\big(e^{(i-s)t} - e^{-(i+s)t}\big)}{-1-s^2} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{e^{-st}(e^{it}+e^{-it})}{s^2+1} - \frac{s}{2i}\,\frac{e^{-st}(e^{it}-e^{-it})}{s^2+1} \\ &= -\frac{e^{-st}}{s^2+1}\big(\cos t + s\sin t\big) \end{aligned}$$

Für die FOURIER-Transformierte arbeiten wir mit $s = i\omega$, also ist wegen $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t\, e^{-i\omega t}\,dt = \frac{-i\omega}{1-\omega^2}\left(e^{-i\omega\pi/2}+e^{i\omega\pi/2}\right) = \frac{2i\omega\cos\frac{\pi\omega}{2}}{\omega^2-1}\,.$$

Für die LAPLACE-Transformierte folgt entsprechend

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin t\, e^{-st}\,dt = \frac{1-se^{-\pi s/2}}{1+s^2}\,.$$

i) Was ist $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$?

Lösung: $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t}e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(\lambda-s)t}\,dt = \frac{1}{\lambda-s}e^{(\lambda-s)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\lambda}$

j) Gilt dies auch für komplexe λ?

Lösung: Natürlich; wie wir zu Beginn des Semesters gesehen haben, gelten (nicht nur) für Exponentialfunktionen im Reellen wie im Komplexen dieselben Integrationsregeln.

k) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{\sinh at\}(s)$ und $\mathcal{L}\{\cosh at\}(s)$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh at\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh at\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

l) Interpretieren Sie die Ergebnisse für $a = i\omega$!

Lösung: Wegen $\sinh i\omega = i\sin\omega$ und $\cosh i\omega = \cos\omega$ führt das auf die bekannten LAPLACE-Transformierten von Sinus und Cosinus.

m) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } [t] \text{ ungerade}\end{cases}$! Stellen Sie das Ergebnis nicht als unendliche Summe dar, sondern als geschlossenen Ausdruck!

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} f(t-k)e^{-s(t-k)}e^{-sk}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk}\int_0^1 f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-2s\ell}\int_0^1 e^{-s\tau}\,d\tau = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-2s\ell}\right)\int_0^1 e^{-s\tau}\,d\tau\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\,\frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1+e^{s}}{s}\,.\end{aligned}$$

n) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte von $g(t) = t - [t]$ und stellen Sie auch hier das Ergebnis in geschlossener Form dar! ($[t]$ = größte ganze Zahl $\leq t$)

Lösung:

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} f(t-k)e^{-s(t-k)}e^{-sk}\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = \sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\int_0^1 \tau e^{-s\tau}\,d\tau\,.$$

Die bereits mehrfach durchgeführte partielle Integration zeigt, daß

$$\int te^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2} + C$$

ist. d.h.

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \left(\sum_{k=0}^\infty e^{-sk}\right)\cdot\frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2} = \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})} = \frac{e^s-(1+s)}{s^2(e^s-1)}\,.$$

o) Geben Sie für die Funktionen aus den beiden vorigen Aufgaben für jedes $t \in \mathbb{R}$ an, wohin die FOURIER-Reihe der Funktion konvergiert!

Lösung: Beide Funktionen haben Periode eins und Sprungstellen genau für die ganzzahligen Argumente. Für $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ konvergiert die Reihe also einfach gegen den Funktionswert, für $t \in \mathbb{Z}$ gegen den Mittelwert aus rechts- und linksseitigem Grenzwert. Da es in beiden Fällen um einen Sprung von null auf eins oder umgekehrt geht, ist dies stets $\frac{1}{2}$.

p) Die FOURIER-transformierbare Funktion f erfülle die Gleichung

$$\ddot{f}(t) + 4\dot{f}(t) - 3f(t) = g(t)$$

mit einer FOURIER-transformierbaren Funktion g. Drücken Sie $\widehat{f}(\omega)$ durch $\widehat{g}(\omega)$ aus!

Lösung: Laut Vorlesung ist

$$\omega^r\widehat{f}(\omega) = (-i)^r\widehat{f^{(r)}}(\omega)\,,$$

also

$$\widehat{f^{(r)}}(\omega) = (i\omega)^r\widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit führt die FOURIER-Transformation beider Seiten der Gleichung auf

$$-\omega^2\widehat{f}(\omega) + 4i\omega\widehat{f}(\omega) - 3\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega) \quad \text{oder} \quad \widehat{f}(\omega) = -\frac{\widehat{g}(\omega)}{\omega^2 - 4i\omega + 3}\,.$$

q) Zeigen Sie: $\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\,!$

Lösung: Da man, absolute Konvergenz der Integrale vorausgesetzt, die Integration über t und die Differentiation nach s miteinander vertauschen kann, ist

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\big(f(t)e^{-st}\big)\,dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)\,.$$

r) Was ist $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s)$?

Lösung: $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s) = \mathcal{L}\big\{t\big(tf(t)\big)\big\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

s) Was ist $\mathcal{L}\{t^{2005} e^{-2006}\}(s)$?

Lösung: $\mathcal{L}\{t^{2005} e^{-2006}\}(s) = e^{-2006}\mathcal{L}\{t^{2005}\}(s) = \frac{2005!\, e^{-2006}}{s^{2006}} = \frac{2005!}{(es)^{2006}}$

Bemerkung: $2005! \approx 1{,}06918967 \cdot 10^{5753}$ und $\frac{2005!}{e^{2006}} \approx 0{,}68284802 \cdot 10^{4881}$

t) Was ist $\mathcal{L}\{t^{2005} e^{-2006t}\}(s)$?

Lösung: $\mathcal{L}\{t^{2005} e^{-2006t}\}(s) = \mathcal{L}\{t^{2005}\}(s + 2006) = -\frac{2005!}{(s + 2006)^{2006}}$