Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 10. November 2005

a) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\omega t}}$ für $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$!

b) Schließen Sie daraus auf die reelle Fourier-Reihe der Funktion
$f(t) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\omega t}} + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i\omega t}}$ für $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$!

c) Werten Sie die Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$ aus an der Stelle $t = \frac{T}{4}$ und berechnen Sie den numerischen Wert der entstehenden Summe!

d) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\sqrt{\ell}}$?

e) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{\sqrt{2k+1}}$?

f) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$ konvergiert, und finden Sie eine obere Schranke für ihren Grenzwert! (*Hinweis:* Die Reihe $S_f(t) = i\dfrac{\sinh \pi}{\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}$ ist aus der Vorlesung bekannt als Fourier-Reihe eines periodisch fortgesetzten Sinus hyperbolicus.)

g) Finden Sie obere Schranken für $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$!

h) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $0 \le t < 1$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

i) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $-\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

j) Zeigen Sie: $\displaystyle\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t\right) * \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} p_\ell \sin \ell\omega t\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k \cos k\omega t$!

k) Was ist $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t\right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\omega t\right)$?

l) *Richtig oder falsch:* Für zwei Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f * (g+h) = f*g + f*h$.

m) *Richtig oder falsch:* Für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f * \frac{1}{f} = 1$.

n) *Richtig oder falsch:* Die Fourier-Reihe von $f(t) = |t|$ für $|t| < \pi$ und $f(\pi) = 0$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π, zeigt bei der Konvergenz das Gibbs-Phänomen.

o) *Richtig oder falsch:* Die Fourier-Reihe von $f(t) = |t|$ für $0 \le t < 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π, zeigt bei der Konvergenz das Gibbs-Phänomen.

p) f sei periodisch mit Periode 2π, und für $-\pi \le t < \pi$ sei $f(t) = t$. Wohin konvergiert die Fourier-Reihe von f für $t = \pi$?

q) Die Kippschwingung $f(t)$ sei periodisch mit Periode 10, und für $0 \le t < 10$ sei $f(t) = e^{-t}$. Wohin konvergiert die Fourier-Reihe von f für $t = 0$?