WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. Oktober 2005

a) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z-3}, \qquad I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \qquad I_5 = \int_\gamma e^{\cos z}\, dz$$

Lösung: Der Integrationsweg γ ist eine Kreislinie um den Nullpunkt mit Radius zwei, die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Daher ist $I_1 = 2\pi i$, wie wir in der Vorlesung sogar für noch allgemeinere Kurven um den Nullpunkt gezeigt haben.

Der Integrand $1/(z-3)$ von I_2 ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{3\}$; in einer offenen Menge also, die sowohl das Innere der Kreisscheibe um Null mit Radius zwei als auch deren Rand enthält. Daher verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

Der Integrand $1/z^2$ von I_3 ist natürlich nicht holomorph im Nullpunkt, aber wir haben mit $F(z) = -1/z$ eine Stammfunktion, die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist. Insbesondere ist sie holomorph in einer Umgebung des Integrationswegs; daher ist

$$I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2} = F\big(\gamma(\pi)\big) - F\big(\gamma(-\pi)\big) = 0\,,$$

da $\gamma(\pi) = \gamma(-\pi) = -1$ ist.

Der Integrand $1/(z^2+1)$ von I_4 ist gleich an zwei inneren Punkten der Kreisscheibe nicht holomorph: Bei $z = i$ und bei $z = -i$. Der Ansatz

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z-i} + \frac{\beta}{z+i} = \frac{(\alpha+\beta)z + (\beta-\alpha)i}{z^2+1}$$

zur Partialbruchzerlegung führt auf $\alpha = -\beta = \frac{i}{2}$, also ist

$$I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z-i} - \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z+i}\,.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite sind Integrale über einen Integranden der Form $1/(z-a)$ mit einem Punkt a, der im Innern der Kreisscheibe liegt; also haben beide den Wert $2\pi i$. Da die Vorfaktoren entgegengesetzt gleich sind, verschwindet die Summe I_4.

Der Integrand von I_5 ist als Hintereinanderausführung zweier auf ganz $\mathbb{C}$ holomorpher Funktionen selbst auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; damit ist klar, daß *jedes* Integral längs einer geschlossenen Kurve nach dem CAUCHYschen Integralsatz verschwindet.

b) Welche dieser Integrale ändern Ihren Wert, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ betrachtet?

Lösung: δ beschreibt einen Kreis um drei mit Radius eins, der im Gegenurhzeigersinn durchlaufen wird. In der zugehörigen Kreisscheibe sowie einer Umgebung davon sind die

Integranden von I_1, I_3, I_4 und I_5 holomorph, also verschwinden die entsprechenden Integrale. Bei I_2 führt die Transformation $u = z - 3$ auf das Integral über $1/u$ über einen Kreis um Null, das Integral ist also gleich $2\pi i$.

c) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$J_1 = \int_\gamma z\,dz, \qquad J_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad J_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad J_4 = \int_\gamma e^z\,dz, \qquad J_5 = \int_\gamma \cos z\,dz$$

Lösung: Hier integrieren wir nur über einen Halbkreis; er hat den Radius zwei um Null und geht von $-2i$ durch das Gebiet $\mathfrak{Re}\, z > 0$ nach $+2i$. Damit sind die Sätze der Vorlesung, soweit sie sich auf geschlossene Integrationswege beziehen, nicht anwendbar. Wir müssen daher entweder den Umweg übers Reelle gehen oder eine in einer Umgebung des Integrationswegs holomorphe Stammfunktion finden.

Für den Integranden z von J_1 ist $\frac{1}{2}z^2$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Stammfunktion, also ist

$$J_1 = \frac{1}{2}\left(\gamma\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 - \gamma\Big(\frac{-\pi}{2}\Big)^2\right) = \frac{(2i)^2 - (-2i)^2}{2} = 0\,.$$

Im Falle von J_2 können wir dafür den Hauptwert des natürlichen Logarithmus nehmen, der ja auf $\mathbb{C}$ minus der negativen reellen Achse holomorph ist. Also ist

$$J_2 = \operatorname{Ln}\gamma\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - \operatorname{Ln}\gamma\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2}\right) - \left(\ln 2 - \frac{\pi i}{2}\right) = \pi i\,,$$

denn $\operatorname{Ln}(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$, falls φ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ liegt.

Für J_3 haben wir $-1/3z^3$ als auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Stammfunktion; da unser Integrationsweg nicht durch den Nullpunkt geht, ist

$$J_3 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma(\frac{\pi}{2})^3} - \frac{1}{\gamma(\frac{-\pi}{2})^3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2i)^3} - \frac{1}{(-2i)^3}\right) = -\frac{1}{3}\,\frac{-2i-2i}{4} = \frac{i}{6}\,.$$

Die Exponentialfunktion ist ihre eigene, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Stammfunktion; somit ist

$$J_4 = e^{\gamma(\frac{\pi}{2})} - e^{\gamma(\frac{-\pi}{2})} = e^{2i} - e^{-2i} = 2\cos 2\,.$$

Für J_5 schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} J_5 &= -\sin\gamma\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \sin\gamma\Big(\frac{-\pi}{2}\Big) = -\sin 2i + \sin(-2i) = -2\sin 2i \\ &= -2\frac{e^{-2} - e^2}{2i} = (e^2 - e^{-2})i = 2i\sinh 2\,. \end{aligned}$$

d) Was ändert sich, wenn Sie bei J_1 bis J_5 statt über γ über $\delta\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto -2e^{-it} \end{cases}$ integrieren?

Lösung: Der neue Integrationsweg geht von $-2e^{-\pi i/2} = 2i$ im Gegenuhrzeigersinn nach $-2e^{\pi i/2} = -2i$, ebenfalls auf dem Kreis mit Radius zwei um den Nullpunkt. Der neue Integrationsweg ergänzt also den alten zur vollen Kreislinie. Das Integral längs der vollen Kreislinie verschwindet für die Integranden von J_1, J_4 und J_5 nach dem CAUCHYschen

Integralsatz und im Falle von J_3, da – wie wir oben gesehen haben – das Integral I_3 verschwindet. Somit ändert sich in diesen Fällen einfach das Vorzeichen.

Im Falle von I_2 ergänzen sich die beiden Integrale zum Integral über $1/z$ längs eines Kreises um den Nullpunkt, also zu $2\pi i$. Also ist auch das Integral längs des neuen Integrationswegs gleich πi.

e) Die komplexe Zahl z sei in Polarkoordinaten dargestellt als $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \varphi$. Was ist $\operatorname{Ln} z$?

Lösung: Natürlich ist $\operatorname{Ln} r = \ln r$ der gewöhnliche natürliche Logarithmus reeller Zahlen. Da Ln als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion auf dem Streifen $-\pi < \Im\mathfrak{m}\, z \leq \pi$ definiert ist, ist auch $\operatorname{Ln} e^{i\varphi} = i\varphi$. Die Summe $\ln r + i\varphi$ liegt im Streifen $-\pi < \Im\mathfrak{m}\, z \leq \pi$ und $e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r} e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z$. Somit ist $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi$.

f) Was ist $\operatorname{Ln} i$?

Lösung: Da $e^{\pi i/2} = i$ ist, folgt $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$.

g) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\dfrac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?

Lösung: Wegen $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{24} - \dfrac{z^6}{720} + \cdots$ ist $\dfrac{\cos z}{z^4} = \dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{z^2}{720} + \cdots$, der Hauptteil ist also $\dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{2z^2}$.

h) Was sind $\operatorname{Res}_{-1} \dfrac{z+2}{(z+1)^2}$, $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^2}$ und $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^5}$

Lösung: $\dfrac{z+2}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{z+1}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{1}{z+1}$, und das ist bereits die gesamte LAURENT-Reihe um $z = -1$. Also ist das Residuum gleich eins.

Die TAYLOR-Reihe des Kosinus ist

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots \quad ,$$

die LAURENT-Reihe von $\frac{\cos z}{z^2}$ also

$$\frac{\cos z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-2}}{(2k)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} - \frac{z^4}{720} + \cdots \quad .$$

Genau wie die TAYLOR-Reihe des Kosinus enthält sie nur Terme mit positiven Exponenten, das Residuum verschwindet also.

Für $\frac{\cos z}{z^5}$ erhalten wir entsprechend die LAURENT-Reihe

$$\frac{\cos z}{z^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-5}}{(2k)!} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z} - \frac{z}{720} + \cdots \quad ,$$

hier ist das Residuum also $\frac{1}{24}$.

i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{13}}\, dz$?

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, enthält die TAYLOR-Reihe von f nur ungerade z-Potenzen. Die LAURENT-Reihe von $\frac{f(z)}{z^{13}}$ entsteht daraus durch Division durch z^{13}, enthält also nur *gerade* Potenzen. Insbesondere gibt es keinen Term mit z^{-1}, das Residuum von $\frac{f(z)}{z^{13}}$ bei Null ist also Null, und weitere Pole gibt es nicht wegen der Holomorphie von f. Daher verschwindet das Integral.

j) Berechnen Sie die Hauptteile der Funktion $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$ bei $z = \pm ia$!

Lösung: Auch hier empfiehlt sich eine Partialbruchzerlegung, wobei der Rechenaufwand wahrscheinlich geringer ist, wenn man das Quadrat im Nenner zunächst ignoriert:

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{\alpha}{z-ia} + \frac{\beta}{z+ia} = \frac{(\alpha+\beta)z + (\alpha-\beta)ia}{z^2+a^2}$$

zeigt, daß $\beta = -\alpha$ und $(\alpha-\beta)ia = 2\alpha a \cdot i = 1$ ist, also

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia}\right)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+a^2)^2} &= \frac{-1}{4a^2}\left(\frac{1}{(z-ia)^2} - \frac{2}{z^2+a^2} + \frac{1}{(z+ia)^2}\right)\\ &= \frac{-1}{4a^2}\left(\frac{1}{(z-ia)^2} + \frac{1}{(z+ia)^2}\right) + \frac{2}{4a^2\cdot 2ai}\left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia}\right).\end{aligned}$$

Da die Terme $\frac{1}{(z+ia)^2}$ und $\frac{1}{z+ia}$ bei $z = ia$ holomorph sind, lassen sie sich dort in eine TAYLOR-Reihe entwickeln, tragen also nichts zum Hauptteil bei. Somit ist der Hauptteil bei $z = ia$

$$\frac{-1}{4a^2}\frac{1}{(z-ia)^2} - \frac{i}{4a^3}\frac{1}{z-ia},$$

und der bei $z = -ia$ entsprechend $\frac{-1}{4a^2}\frac{1}{(z+ia)^2} + \frac{i}{4a^3}\frac{1}{z+ia}$.

k) a sei eine positve reelle Zahl. Was ist $\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$, wenn γ den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um Null mit Radius $R_1 = a/2$ *bzw* $R_2 = 2a$ bezeichnet?

Lösung: Da der Integrand nur bei $\pm ia$ Polstellen hat, verschwindet das Integral über den Kreis mit Radius $a/2$ nach dem CAUCHYschen Integralsatz. Das über den Kreis mit Radius $2a$ enthält beide Polstellen, ist also gleich $2\pi i$ mal der Summe der zugehörigen Residuen, die nach der vorigen Aufgabe $\pm\frac{i}{4a^3}$ sind, sich also aufheben. Somit verschwindet auch dieses Integral.

l) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$?

Lösung: Wir integrieren wie bei den entsprechenden Beispielen in der Vorlesung für eine reelle Zahl $R > a$ zunächst von $-R$ nach R und dann entlang des Halbkreises durch die obere Halbebene mit Radius R zurück nach $-R$. Der Halbkreis enthält nur die Polstelle bei ia, nach dem Residuensatz ist das Integral also $2\pi i \cdot \frac{-i}{4a^3} = \frac{\pi}{2a^3}$.

Auf dem Halbkreisbogen ist $\left|z^2 + a^2\right|^2$ größer als R^4, der Betrag des Integranden also kleiner als $1/R^4$, und wenn wir umschreiben in ein Integral von 0 bis π, wozu wir mit $\dot\gamma(t)$ vom Betrag R multiplizieren müssen, immer noch kleiner als $1/R^3$. Somit verschwindet dieses Integral für $R \to \infty$, und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$.

m) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$!

Lösung: Bei diesem Intgegral könnte man zwar über eine Partialbruchzerlegung relativ schnell eine Stammfunktion des Integranden finden, insgesamt dürfte der Rechenaufwand allerdings beim Umweg über das Komplexe etwas geringer sein.

Das Nennerpolynom $(x^2+1)(x^2+9)$ verschwindet für $x = \pm i$ und $x = \pm 3i$, an diesen vier Stellen hat der Integrand also Pole.

Der Integrationsweg sei wie oben; hier sei er zur Abwechslung noch einmal formal erklärt: Wir betrachten zunächst den Halbkreis γ_R um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C};\quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > 3$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = i$ und $z_2 = 3i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h.

$$\operatorname{Res}_{z=z_\nu} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to z_\nu} \frac{16(z-z_\nu)z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,.$$

Damit ist

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{16z^2}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{16i^2}{(2i)(i^2+9)} = \frac{-16}{16i} = i$$

und

$$\operatorname{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z+3i)} = \frac{16\cdot 9i^2}{(9i^2+1)(6i)} = \frac{-16\cdot 9}{-8\cdot 6i} = -3i\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{\delta_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} + \operatorname{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\right) \\ &= 2\pi i\big(i - 3i\big) = 4\pi\,.\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = \int_0^\pi \frac{16R^2e^{2it}\cdot iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4)}\,dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0,\pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

n) *(Aus der diesjährigen Modulklausur)* Berechnen Sie $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{16x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\,dx$!

Lösung: Für reelles $R > 0$ sei der Integrationsweg γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}.$$

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Zur Berechnung von $\displaystyle\int_{\delta_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz$ brauchen wir also zunächst die Pole des Integranden; diese sind die Nullstellen der beiden Faktoren des Nenners, also $z = \pm i$ für den ersten und $z = -2 \pm i$ für den zweiten. Insbesondere sind alle Pole einfach.

Im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises liegen (für $R > \sqrt{13}$) nur die beiden Pole mit dem positiven Imaginärteil; wir brauchen also deren Residuen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to i} \frac{16z(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{16z}{(z+i)(z^2+4z+5)} = \frac{16i}{2i\cdot(-1+4i+5)} \\
&= \frac{8}{4+4i} = \frac{2}{1+i} = 1-i \\
\operatorname{Res}_{z=-2+i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to -2+i} \frac{16z(z+2-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} \\
&= \lim_{z\to -2+i} \frac{16z}{(z^2+1)(z+2+i)} = \frac{16\cdot(-2+i)}{(4-4i)\cdot 2i} \\
&= \frac{16\cdot(-2+i)}{8+8i} = \frac{-4+2i}{1+i} = \frac{(-4+2i)(1-i)}{2} = -1+3i
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz ist daher für $R > \sqrt{13}$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\delta_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz \\
&= 2\pi i \cdot \left(\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} + \operatorname{Res}_{z=-2+3i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} \right) \\
&= 2\pi i \cdot (1 - i - 1 + 3i) = -4\pi.
\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz = \int\limits_0^{\pi} \frac{16iR^2e^{2it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4Re^{it}+5)}\,dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ zum Integral über die reelle Achse wird.