Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. Oktober 2005

a) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z-3}, \qquad I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \qquad I_5 = \int_\gamma e^{\cos z}\, dz$$

b) Welche dieser Integrale ändern Ihren Wert, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 3+e^{it} \end{cases}$ betrachtet?

c) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$J_1 = \int_\gamma z\, dz, \qquad J_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad J_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad J_4 = \int_\gamma e^z\, dz, \qquad J_5 = \int_\gamma \cos z\, dz$$

d) Was ändert sich, wenn Sie bei J_1 bis J_5 statt über γ über $\delta\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto -2e^{-it} \end{cases}$ integrieren?

e) Die komplexe Zahl z sei in Polarkoordinaten dargestellt als $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \le \varphi$. Was ist $\operatorname{Ln} z$?

f) Was ist $\operatorname{Ln} i$?

g) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\dfrac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?

h) Was sind $\operatorname{Res}_{-1} \dfrac{z+2}{(z+1)^2}$, $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^2}$ und $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^5}$

i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{13}}\, dz$?

j) Berechnen Sie die Hauptteile der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$ bei $z = \pm ia$!

k) a sei eine positve reelle Zahl. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$, wenn γ den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um Null mit Radius $R_1 = a/2$ *bzw* $R_2 = 2a$ bezeichnet?

l) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$?

m) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx$!

n) *(Aus der diesjährigen Modulklausur)* Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\, dx$!