WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, ZIMMER C 201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. Oktober 2005

*a)* Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = i(1-i)$, $z_2 = (3+i)(3-i)$, $z_3 = (i+1)(i-1)$, $z_4 = i^{2005}$, $z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}$, $z_6 = \frac{4+i}{2-i}$

*b)* Berechnen Sie für $z = \sqrt{3}+i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und $z^{2004}$ sowie den Betrag!

*c)* Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

*d)* Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = 1$!

*e)* Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$!

*f)* Bestimmen Sie für $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

*g)* Berechnen Sie für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 5-i \end{pmatrix}$ die Längen sowie die HERMITEschen Produkte $\vec{v}\cdot\vec{w}$ und $\vec{w}\cdot\vec{v}$!

*h)* Schreiben Sie die Funktion $\sin 2x \cdot \sin 3y$ als Summe von reinen Sinus- und Cosinustermen!

*i)* In einem Wechselstromkreis sind eine Spule mit Widerstand $R$ und Induktivität $L$ sowie ein Kondensator der Kapazität $C$ hintereinandergeschaltet; die Kreisfrequenz des Stroms sei $\omega$, seine Amplitude sei $I_0$. Welche Impedanz hat die Schaltung als ganzes?

*j)* Welche Amplitude $U_0$ hat die Spannung in diesem Stromkreis?

*k)* Zeigen Sie: $e^z$ verschwindet für keine komplexe Zahl $z$.

*l)* Zeigen Sie: $e^z = 1$ genau dann, wenn $z$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist.

*m)* Betrachten Sie $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ für beliebige komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$. Wo haben diese Funktionen ihre Nullstellen?

*n)* Welche der Funktionen $f(z) = 2\cosh z$, $g(z) = e^z + e^{\overline{z}}$ und $h(z) = z^2 \sin z$ ist komplex differenzierbar?

*o)* Berechnen Sie für $\gamma\colon [0,8] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} (t-1,-1) & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ (1,t-3) & \text{für } 2 \le t \le 4 \\ (5-t,1) & \text{für } 4 \le t \le 6 \\ (-1,-t+7) & \text{für } 6 \le t \le 8 \end{cases}$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma \vec{V}_k(x,y)\,ds$ für:

$$\vec{V}_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_2(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_3(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_4(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}!$$

*p)* Definieren Sie ein Kurvenstück $\delta$, das $\gamma$ in Gegenrichtung durchläuft!

*q)* Wie ändern sich die obigen Integrale, wenn man über $\delta$ statt über $\gamma$ integriert?

*r)* Das Vektorfeld $\vec{V}$ sei gegeben durch $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{cases}, \quad \gamma_2\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (1,0,t) \end{cases}$$

und

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} (\cos 2t, \sin 2t, 0) & \text{falls } t \le 10\pi \\ \big(1,0,2(t-10\pi)\big) & \text{falls } t \ge 10\pi \end{cases} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Integrale von $\vec{V}$ längs der $\gamma_i$! Ist das Vektorfeld $\vec{V}$ konservativ?