

23. Januar 2006

13. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Falls f in einem Punkt \mathbf{x} des Würfels $-1 \leq x_i \leq 1$ für $i = 1, \dots, n$ ein Maximum annimmt, ist dort $\text{grad } f = \vec{0}$.
- 2) *Richtig oder falsch:* f sei auf $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < 2\}$ definiert und ∇f sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ auf der Einheitskugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ an.
- 3) *Richtig oder falsch:* Falls die stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nirgends ein Maximum hat, ist sie unbeschränkt.
- 4) Konstruieren Sie eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, für die keine der beiden partiellen Ableitungen überall verschwindet, aber $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$ ist, ohne daß der Nullpunkt Maximum, Minimum oder Sattelpunkt wäre!
- 5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Zu einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine positiv definite Matrix $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, daß $W^2 = A$ ist.
Hinweis: Was wissen Sie über die Eigenvektoren symmetrischer Matrizen?
- b) Berechnen Sie diese Matrix W für $A = \begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 36 & 52 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima sowie die Sattelpunkte der Funktionen

- a) $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$
- b) $g(x, y) = \cos xy + (x + y)^2$
in \mathbb{R}^2 !

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Ein Produkt werde aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 10 Euro, 5 Euro bzw. 20 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $40\sqrt{x}\sqrt[4]{y}\sqrt[4]{z}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 50 000 Euro maximal gefertigt werden?
- b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 50 000 Euro zu erhöhen?

Abgabe bis zum Montag, dem 30. Januar 2006, um 15.30 Uhr