WOLFGANG K. SEILER — A5, C201
Tel. 2515

19. Dezember 2005

10. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe k und $\vec{w}$ einer der Stufe $\ell > k$, so ist $\vec{v} + \vec{w}$ ein Hauptvektor der Stufe ℓ.

2) Richtig oder falsch: Wenn das System $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ eine nichtkonstante periodische Lösung hat, hat die Matrix A zwei nichtreelle konjugiert komplexe Eigenwerte.

3) Was können Sie über A sagen, wenn es eine spiralförmige Lösungskurve gibt?

4) Richtig oder falsch: Hat $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ eine reelle symmetrische Matrix A, so ist jede reelle Lösung eine Linearkombination von reellen Exponentialfunktionen.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Compute the space of solution of the following system of linear differential equations:

$$\dot{u}(t) = v(t) - u(t), \quad \dot{v}(t) = -v(t), \quad \dot{x}(t) = x(t) + y(t), \quad \dot{y}(t) = y(t) + z(t), \quad \dot{z}(t) = z(t)\,!$$

b) Determine the subspace of all solutions which remain bounded for $t \to \infty$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Hauptvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$!

b) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat!

c) Berechnen Sie die Matrizen A^{100} und e^{At}!

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) + z(t), & x(0) &= 2 \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) - 4y(t) + 2z(t), & y(0) &= 1 \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) - 5y(t) + 2z(t), & z(0) &= 0 \end{aligned}$$

f) Was können Sie über das Langzeitverhalten dieser Lösung sagen?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Um einen besseren Überblick zu bekommen, schnallt sich der Weihnachtsmann (130 kg) einen Raketenmotor (20 kg) um und startet mit 50 kg Treibstoff gen oben. Nach dem russischen Raketenpionier KONSTANTIN ZIOLKOWSKIĬ (1857–1935) erreicht er im gravitationsfreien Vakuum eine Beschleunigung von $a(t) = -w_0\dot{m}(t)/m(t)$, wobei $w_0 = 4{,}5\,\mathrm{km/s}$ die Geschwindigkeit ist, mit der Treibstoff aus seinem Raketenmotor austritt, und $m(t)$ die Masse des gesamten Systems zur Zeit t. Dagegen arbeiten die Erdbeschleunigung $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ und der hier vernachlässigte Luftwiderstand. Der Raketenmotor verbraucht pro Sekunde 5 kg Treibstoff. Welche Höhe erreicht der Weihnachtsmann, und wann prallt er mit welcher Geschwindigkeit am Boden auf?

Abgabe bis zum Montag, dem 9. Januar 2006, um 15.30 Uhr