

12. Dezember 2005

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x + 20$?
- 2) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x - 20$?
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ist HERMITESCH.
- 4) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist ${}^t A \bar{A}$ HERMITESCH.
- 5) *Richtig oder falsch:* Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor r -ter Stufe gibt, hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit r .
- 6) *Richtig oder falsch:* Zu jedem Eigenwert der algebraischen Vielfachheit r gibt es einen Hauptvektor r -ter Stufe.
- 7) Die komplexe $n \times n$ -Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ mit den algebraischen Vielfachheiten r_1, \dots, r_s . Was ist $\det A$?

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} \cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{At} !
- c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = -x(t) + y(t)$ und $\dot{y}(t) = -y(t)$!
- d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Compute the eigenvalues and eigenvectors of the matrix $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 \\ -28 & 15 & 14 \\ 16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$!
- b) What is e^A ?
- c) Solve the initial value problem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 16x(t) & - & 8z(t), & x(0) &= 1 \\ \dot{y}(t) &= -28x(t) + 15y(t) + 14z(t), & y(0) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= 16x(t) & - & 8z(t), & z(0) &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Welche Bedingungen müssen die komplexen Zahlen a, b, c erfüllen, damit die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2i & b \\ c & 3 & c \\ a & 2i & b \end{pmatrix}$$

- a) symmetrisch b) HERMITESCH ist?
- c) In welchen Fällen können Sie sicher sein, daß alle Eigenwerte von A reell sind?

Abgabe bis zum Montag, dem 19. Dezember 2005, um 15.30 Uhr