

5. Dezember 2005

8. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Welche Ableitung im Distributionensinne hat die Funktion $f(t) = t - [t]$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $s \leq t$ bezeichnet?
- 2) *Richtig oder falsch:* $\delta * \delta = \delta$
- 3) Unter welcher Bedingung an $\hat{f}(\omega)$ ist eine stetige Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ durch ihre ganzzahligen Werte bestimmt?
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = y(t)$ hat nur die Lösung $y(t) = e^t$.

Aufgabe 1: (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Faltung des Rechteckimpulses $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit sich selbst!
- b) Was ist die FOURIER-Transformierte dieser Faltung?
- c) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$!
- d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$ quadratintegrierbar ist!
- e) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt$?

Aufgabe 2: (3 Punkte)

- a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = (N_\sigma * N_\tau)(t)$ mit $N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) The radioactive half-life of a substance is the time $t = t_{\frac{1}{2}}$ for which $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ has decreased to $\frac{1}{2} m_0$. Express λ in terms of $t_{\frac{1}{2}}$!
- b) The Caesium-137 which was set free at the nuclear accident in Chernobyl on April 26, 1986 has a half-life of 30.14 years. Which percentage of it will have decayed by December 26, 2005?
- c) LIBBY's method of carbon dating relies on the fact that the ratio of the stable isotope carbon-14 and its radioactive counterpart carbon-12 is almost constant in living organisms. After death, C^{14} decays with a half-life of 5763 years, whereas the amount of C^{12} doesn't change. A sample of wood from the caves of Lascaux showed an activity of 0.97 decays per gram and minute; for living wood, 6.68 decays are usually observed. How old was the sample?

Abgabe bis zum Montag, dem 12. Dezember 2005, um 15.30 Uhr