Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

14. November 2005

5. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Zeigen Sie: Für eine gerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $\widehat{f}(\omega)$ existiert, ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\,.$$

2) Finden Sie eine entsprechende Formel für ungerade Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

3) Was können Sie über die Laplace-Transformierten von geraden und ungeraden Funktionen sagen?

4) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verschwinde für alle $t < 0$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{L}\{f(t)\}(i\omega)$.

5) Was ist $\mathcal{L}\{\sin(at + b)\}(s)$?

6) *Richtig oder falsch:* Für $f(t) = e^{-t^2}$ existiert $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$.

7) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe eine Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, daß die Fourier-Integrale $\widehat{f}$ und $\widehat{F}$ beide existieren. Drücken Sie $\widehat{F}$ aus durch $\widehat{f}$!

Aufgabe 1: *(2 Punkte)*
Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$, wohin die Fourier-Reihe der periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode zehn und $f(t) = t^2$ für $0 \le t < 10$ konvergiert! An welchen Stellen tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Fourier- und Laplace-Transformierten:

a) $f(t) = \max(0, 2 - 3\,|t|)$

b) $g(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{für } |t| < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c) $h(t) = \begin{cases} |\sin 2t| & \text{für } |t| < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

a) Zeigen Sie: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$!
Hinweis: Machen Sie im Γ-Integral die Substitution $u = \sqrt{t}$, und verwenden Sie das aus der HM I bekannte Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$!

b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = t^{5/2}$!

Abgabe bis zum Montag, dem 21. November 2005, um 15.30 Uhr