Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, C201

17. Oktober 2005

1. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ ist eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $z \mapsto z\,|z|$ ist holomorph.

3) *Richtig oder falsch:* Jede holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist konstant.

4) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, f(x+iy) = u(x,y) = x^2 - y^2$! Ist f eindeutig bestimmt?

5) *Richtig oder falsch:* Die holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft $z^2 = i$!

b) Zeigen Sie: Jede komplexe Zahl vom Betrag eins läßt sich in der Form $\frac{z}{\bar z}$ schreiben, wobei der Betrag von z beliebig vorgegeben werden kann.

b) Schreiben Sie $\sin^2 x - \cos^2 x$ als Summe reiner Sinus- und Cosinusterme!

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion!

b) Bestimmen Sie die größte Teilmenge $D_1 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ als holomorphe Funktion erklärt werden kann, und die größte Teilmenge $D_2 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ als holomorphe Funktion erklärt werden kann!

c) Bestimmen Sie die Ableitungen von Tangens und Cotangens auf D_1 *bzw.* D_2 !

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie für $\gamma\colon [0,8] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} t-1-i & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ it+1-3i & \text{für } 2 \le t \le 4 \\ -t+5+i & \text{für } 4 \le t \le 6 \\ -it-1+7i & \text{für } 6 \le t \le 8 \end{cases}$ die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma z\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$!

Abgabe bis zum Montag, dem 24. Oktober 2005, um 15.30 Uhr