Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

26. September 2005

Nachklausur Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist zwar $f(x) = x^2$ eine solche Funktion, nicht aber $(-1)\cdot f$.

2) Richtig oder falsch: $\mathbb{F}_2^4$ hat einen Untervektorraum mit acht Elementen

Lösung: *Richtig,* beispielsweise das Erzeugnis der ersten drei Einheitsvektoren, d.h. die Teilmenge aller Vektoren mit vierter Komponente Null.

3) Richtig oder falsch: Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, so auch $\psi\colon V \to V;\ \ \vec{v} \mapsto 2\varphi\big(3\vec{v}\big)$

Lösung: *Richtig:* Für zwei Skalare λ, μ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ist $\psi(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = 2\varphi\big(3(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})\big) = 6\varphi(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = 6\lambda\varphi(\vec{v}) + 6\mu\varphi(\vec{w}) = \lambda\cdot 2\varphi(3\vec{v}) + \mu\cdot 2\varphi(3\vec{w}) = \lambda\psi(\vec{v}) + \mu\psi(\vec{w})$.

4) Geben Sie die Menge $M = \big\{x \in \mathbb{Z} \bigm| 999x \equiv 1 \bmod 2005\big\}$ explizit an!

Lösung: M enthält genau die Zahlen $x \in \mathbb{Z}$, zu denen es ein $y \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß gilt: $999x + 2005y = 1$. Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf 999 und 2005 ergibt

$$\begin{aligned}
2005 : 999 &= 2 \text{ Rest } 7 \Longrightarrow 7 = 1\cdot 2005 - 2\cdot 999\\
999 : 7 &= 142 \text{ Rest } 5 \Longrightarrow 5 = 1\cdot 999 - 142\cdot 7 = 285\cdot 999 - 142\cdot 2005\\
7 : 5 &= 1 \text{ Rest } 2 \Longrightarrow 2 = 7 - 5 = 143\cdot 2005 - 287\cdot 999\\
5 : 2 &= 2 \text{ Rest } 1 \Longrightarrow 1 = 5 - 2\cdot 2 = 859\cdot 999 - 428\cdot 2005
\end{aligned}$$

Also ist $M = \big\{859 + 2005k \bigm| k \in \mathbb{Z}\big\}$.

5) Was ist $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$?

Lösung: Da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zeilen (oder Spalten) stets der Vektor mit lauter Komponenten eins ist, hat die Matrix nur Rang zwei, ist also nicht invertierbar und hat somit Determinante null.

6) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Niveaulinie $N_a(f)$ von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ \ (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$!

Lösung: Da für $x, y \in \mathbb{R}$ stets $x^2 + y^2 \geq 0$ ist, nimmt f nur Werte ≥ 1 an. Für $a < 1$ ist somit $N_a(f) = \emptyset$, für $a = 0$ ist $N_0(f) = \{(0,0)\}$, und für $a > 1$ schließlich ist $N_a(f)$ die Kreisline $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = \ln a\right\}$ um den Nullpunkt mit Radius $\sqrt{\ln a}$.

7) Richtig oder falsch: Die Rotation eines Vektorfelds ist quellenfrei.

Lösung: *Richtig,* denn $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = 0$ für jedes (mindestens zweimal stetig differenzierbare) Vektorfeld $\vec{V}$.

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
$M \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bestehe aus allen Polynomen vom Grad höchstens zwei in $\sin x$ sowie allen Polynomen vom Grad höchstens zwei in $\cos x$, d.h. also aus Elementen der Form

$$f(x) = a + b\sin x + c\sin^2 x \quad \text{und} \quad g(x) = \alpha + \beta\cos x + \gamma\cos^2 x\,.$$

a) Ist M ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Lösung: *Nein,* denn beispielsweise liegen $\sin x$ und $\cos x$ in M, nicht aber deren Summe $\sin x + \cos x$.

b) $V = [M]$ sei der von M erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie seine Dimension sowie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Offenbar kann jedes Element von V als Linearkombination der sechs Funktionen $1, \sin x, \sin^2 x, \cos x$ und $\cos^2 x$ geschrieben werden. Diese Funktionen sind aber nicht linear unabhängig, denn $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$ ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Deshalb erzeugen bereits die ersten vier dieser Funktionen den Vektorraum, und diese sind linear unabhängig: Ist nämlich

$$\lambda \cdot 1 + \mu \cdot \sin x + \nu \cdot \sin^2 x + \rho\cos x = 0\,,$$

so erhält man für $x = 0$ und $x = \pi$ die beiden Beziehungen $\lambda + \rho = 0$ und $\lambda - \rho = 0$, also $\lambda = \rho = 0$. Die speziellen Werte $x = \pm\pi/2$ zeigen sodann, daß auch $\mu + \nu$ und $-\mu + \nu$ verschwinden, d.h. $\mu = \nu = 0$. Somit ist das System $\mathcal{B} = (1, \sin x, s\sin^2 x, \cos x)$ eine Basis von V und V hat die Dimension vier.

c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f'' + f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$!

Lösung: Zunächst müssen wir uns überlegen, daß $\varphi(f)$ für ein Element $f \in V$ wieder in V liegt. Dazu reicht es, die Bilder der Basisvektoren zu betrachten, die wir nachher in *e)* ohnehin brauchen:

$$\varphi(1) = 0 + 1 = 1, \quad \varphi(\sin) = -\sin + \sin = 0, \quad \varphi(\sin^2) = 2\cos^2 - \sin^2 = 2 - 3\sin^2$$

und $\varphi(\cos) = -\cos + \cos = 0$. Offensichtlich liegen alle diese Funktionen in V.
Als nächstes muß die Linearität nachgewiesen werden: Für $f, g \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)'' + (\lambda f + \mu g) = \lambda f'' + \mu g'' + \lambda f + \mu g = \lambda(f'' + f) + \mu(g'' + g)\\ &= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.\end{aligned}$$

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

Lösung: Nach *c)* wird das Bild erzeugt von 1 und $2 - 3\sin^2$, ist also zweidimensional. Nach der Dimensionsformel ist daher auch

$$\dim \operatorname{Kern}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{Bild}\varphi = 4 - 2 = 2\,.$$

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *b)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Basisdarstellung der Bilder der Basisvektoren; letztere kennen wir aus *b)* und erhalten die Abbildungsmatrix daher sofort als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} 2w & + & x & + & 3y & + & z & = & 0 & (1) \\ -4w & - & x & - & 4y & - & 2z & = & 3 & (2) \\ 2w & + & 3x & + & 5y & - & z & = & 2 & (3) \\ 8w & + & 4x & + & 12y & + & a^2z & = & a+2 & (4) \end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a-2}$.

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzen drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten, einmal von der dritten und viermal von der vierten:

$$\begin{array}{rcrll} x + 2y & & & 3 & (5) \\ 2x + 2y - & & 2z = & +2 & (6) \\ & & (a^2-4)z = & a+2 & (7) \end{array}$$

Auch wenn es nicht viel bringt, können wir die zweite dieser Gleichungen noch durch zwei kürzen:

$$2x + 2y - 2z = \;\; +2 \qquad (6')$$

Als nächstes soll x aus den Gleichungen $(6')$ und (7) eliminiert werden; da es in (7) ohnehin nicht vorkommt, recht es dazu, Gleichung (5) von $(6')$ zu subtrahieren:

$$\begin{array}{rrll} -2y - & 2z = & -4 & (8) \\ & (a^2-4)z = & a+2 & (7) \end{array}$$

Dies wird etwas einfacher, wenn wir Gleichung (8) noch durch -2 kürzen:

$$\begin{array}{rrll} y + & z = & 2 & (8') \\ & (a^2-4)z = & a+2 & (7) \end{array}$$

Mit den Gleichungen $(1), (5), (8')$ und (7) ist die Treppengestalt erreicht und wir können uns an die Berechnung der einzelnen Variablen machen:

Für $a = 2$ wird (7) zu $0z = 4$, was offensichtlich unlösbar ist; somit ist das gesamte Gleichungssystem für $a = 2$ unlösbar.

Für $a = -2$ wird (7) zu $0z = 0$, was für alle $z \in \mathbb{R}$ erfüllt ist; hier können wir für z also eine beliebige reelle Zahl λ einsetzen.

Für $a \neq \pm 2$ schließlich können wir zunächst mit $a+2$ kürzen und dann durch $a-2$ dividieren und erhalten
$$z = \frac{1}{a-2}\,.$$
Gleichung $(8')$ ergibt sodann
$$y = 2 - z = \begin{cases} 2 - \frac{1}{a-2} = \frac{2a-5}{a-2} & \text{für } a \neq \pm 2 \\ 2 - \lambda & \text{für } a = -2 \end{cases}$$
Dies können wir weiter einsetzen in Gleichung (5) und dann nach x auflösen:
$$x = 3 - 2y = \begin{cases} 3 - 4 + \frac{2}{a-2} = -\frac{a-4}{a-2} & \text{für } a \neq \pm 2 \\ 2\lambda - 1 & \text{für } a = -2 \end{cases}$$
Schließlich zeigt Gleichung (1), daß
$$w = -\frac{1}{2}(x + 3y + z) = -\frac{1}{2}\big(2z - 1 + 6 - 3z + z\big) = -\frac{5}{2}$$
ist, unabhängig von a. Die Lösungsmenge ist daher
$$\mathcal{L}_a = \left\{\left(-\frac{5}{2}, -\frac{a-4}{a-2}, \frac{2a-5}{a-2}, \frac{1}{a-2}\right)\right\} \quad \text{für } a \neq \pm 2,$$
$$\mathcal{L}_{-2} = \left\{\left(-\frac{5}{2}, 2\lambda - 1, 2 - \lambda, \lambda\right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_2 = \emptyset\,.$$

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}\ !$$

Lösung: Wir bestimmen nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonal- sowie eine Orthonormalbasis des von den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_5$ aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^3$ und stellen die Spaltenvektoren in dieser Basis dar.

Als ersten Vektor der Orthogonalbasis können wir den ersten Spaltenvektor $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ wählen; wegen
$$|\vec{v}_1| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$
ist der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis $\vec{q}_1 = \frac{1}{7}\vec{a}_1$ und dementsprechend $\vec{a}_1 = 7\vec{q}_1$.

Für den zweiten Vektor der Orthogonalbasis machen wir den Ansatz $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0$ ist. Da
$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 49$$
gleich dem Quadrat der Länge von $\vec{a}_1$ ist, folgt $\lambda = -1$ und
$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
Auch dieser Vektor hat die Länge sieben, der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{q}_2 = \frac{1}{7}\vec{b}_2$ und $\vec{a}_2 = \vec{b}_2 + \vec{a}_1 = 7\vec{q}_1 + 7\vec{q}_2$.

Für den noch fehlenden dritten Vektor der Orthogonalbasis ist der Ansatz entsprechend:

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = 0\,.$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = (-2+27+24) + 49\lambda \Longrightarrow \lambda = -1$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = (-6+18-12) + 49\mu \Longrightarrow \mu = 0$$
$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Auch dieser Vektor hat die Länge sieben; um eine Orthonormalbasis zu erhalten, müssen wie also einfach alle Vektoren der Orthogonalmatrix mit $\frac{1}{7}$ multiplizieren:

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{q}_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \vec{b}_1$ ist $\vec{a}_3 = \vec{b}_3 + \vec{b}_1 = 7\vec{q}_1 + 7\vec{q}_3$.
Die nach verbleibenden beiden Spaltenvektoren machen keine Arbeit mehr, da sie mit bereits betrachteten übereinstimmen: $\vec{a}_4 = \vec{a}_2 = 7\vec{q}_1 + 7\vec{q}_2$ und $\vec{a}_5 = \vec{a}_1 = 7\vec{q}_1$. Somit ist

$$Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Invertieren Sie die Matrix Q aus dieser Zerlegung!

Lösung: Da Q eine orthogonale Matrix ist, ist $Q^tQ = E$, d.h.

$$Q^{-1} = {}^tQ = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls ${}^tA = A$ ist, HERMITEsch, wenn ${}^tA = \overline{A}$ ist, *orthogonal,* wenn ${}^tAA = E$ ist und *unitär*, wenn ${}^t\overline{A}A = E$ ist. Welche dieser vier Eigenschaften hat die Matrix $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$?

Lösung: Offensichtlich ist ${}^tA = A$, die Matrix ist also symmetrisch. Sie ist aber nicht HERMITEsch, denn in der komplex konjugierten Matrix werden die Einträge $4i$ zu $-4i$, so daß diese nicht gleich der transponierten Matrix ist.
${}^tAA$ ist offensichtlich nicht die Einheitsmatrix: Der Eintrag links oben ist das Produkt der ersten Zeile von ${}^tA$ mit der ersten Spalte von A, also das Produkt

$$\frac{1}{25}\left(3^2 + (4i)^2\right) = \frac{9-16}{25} \neq 1\,.$$

Somit ist A nicht orthogonal.
A ist aber unitär, denn ${}^t\overline{A} \cdot A$ ist die Einheitsmatrix.

b) Was ist A^{-1}?

Lösung: Für eine unitäre Matrix ist $A^{-1} = {}^t\overline{A}$; da A symmetrisch ist, folgt speziell für diese Matrix

$$A^{-1} = \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4i \\ -4i & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie $\det(A)$!

Lösung: $\det A = \frac{1}{5^2}(3 \cdot 3 - 4i \cdot 4i) = \frac{9+16}{25} = 1\,.$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!
(Hinweis: Die Eigenwerte sind einstellige ganze Zahlen.)

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot (3-\lambda) \cdot (3-\lambda) + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot (3-\lambda) \cdot (-2) - (-\lambda) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot (3-\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda - 4 - 2 + 6 - 2\lambda + 2\lambda + 6 - 2\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6\,.$$

Laut Hinweis sind diese Nullstellen einstellige ganze Zahlen; Probieren zeigt, daß es dabei um die drei Zahlen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ handelt.

In $A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist offensichtlich die dritte Spalte das Negative der ersten, also erfüllt der Vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $A\vec{v}_1 = \vec{0}$ und ist somit Eigenvektor. Da der zweite Spaltenvektor von $A - E$ linear unabhängig vom ersten ist, hat die Matrix Rang zwei, das LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ also einen eindimensionalen Lösungsraum, so daß $\vec{v}_1$ diesen Lösungsraum, den Eigenraum zum Eigenwert eins, aufspannt.

In $A - \lambda_2 E = A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ haben die ersten beiden Spalten den Nullvektor als Summe und sind linear unabhängig von der dritten; hier wird der Eigenraum also aufgespannt von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In $A - \lambda_2 E = A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ schließlich ist die Summe aller drei Spalten der Nullvektor; hier wird der Eigenraum also aufgespannt von $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Lösung: Die obigen Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, denn

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \lambda + \mu + \nu \\ \mu + \nu \\ \lambda + \nu \end{pmatrix}$$

kann offensichtlich nur dann gleich dem Nullvektor sein, wenn $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist. Da drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ eine Basis bilden, ist $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ somit eine Basis aus

Eigenvektoren. Bezüglich dieser Basis hat die Matrix die Diagonalgestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten als Diagonaleinträgen.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Für zwei Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und zwei reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $J_{\lambda\vec{V}+\mu\vec{W}} = \lambda J_{\vec{V}} + \mu J_{\vec{W}}$!

Lösung: $\operatorname{grad}(f \cdot g)$ hat $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}$ als i-te Komponente, und das ist nach der LEIBNIZ-Regel gleich $g\dfrac{\partial f}{\partial x_i} + f\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$. Das ist aber gerade die i-te Komponente von $f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy} - \sin x \cos y + x^2 + 1 \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

Lösung: Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differenzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy} - \cos x \cos y + 2x \\ f_y(x,y) &= xe^{xy} + \sin x \sin y \\ \nabla f(x,y) &\begin{pmatrix} ye^{xy} - \cos x \cos y + 2x \\ xe^{xy} + \sin x \sin y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß $f_{xy} = f_{yx}$ ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy} + \sin x \cos y + 2 \\ f_{xy}(x,y) &= (1+xy)e^{xy} + \cos x \sin y \\ f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy} + \sin x \cos y \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(x,y)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2e^{xy} + \sin x \cos y + 2 & (1+xy)e^{xy} + \cos x \sin y \\ (1+xy)e^{xy} + \cos x \sin y & x^2e^{xy} + \sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}$ des Vektorfelds $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y+z) \\ \sin(xyz) \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$!

Lösung: In den Zeilen der JACOBI-Matrix stehen die partiellen Ableitungen der Komponenten von V; bezeichnen wir diese mit f, g, h, so ist also

$$J_{\vec{V}} = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z) \\ yz\cos(xyz) & xz\cos(xyz) & xy\cos(xyz) \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$