Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

26. September 2005

Nachklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: $\mathbb{F}_2^4$ hat einen Untervektorraum mit acht Elementen

3) Richtig oder falsch: Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, so auch $\psi\colon V \to V;\ \ \vec{v} \mapsto 2\varphi(3\vec{v})$

4) Geben Sie die Menge $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 999x \equiv 1 \bmod 2005\}$ explizit an!

5) Was ist $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

6) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Niveaulinie $N_a(f)$ von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ \ (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$!

7) Richtig oder falsch: Die Rotation eines Vektorfelds ist quellenfrei.

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
$M \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bestehe aus allen Polynomen vom Grad höchstens zwei in $\sin x$ sowie allen Polynomen vom Grad höchstens zwei in $\cos x$, d.h. also aus Elementen der Form

$$f(x) = a + b\sin x + c\sin^2 x \quad \text{und} \quad g(x) = \alpha + \beta\cos x + \gamma\cos^2 x\,.$$

a) Ist M ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

b) $V = [M]$ sei der von M erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie seine Dimension sowie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f'' + f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$!

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *b)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
2w &+& x &+& 3y &+& z &=& 0 & (1)\\
-4w &-& x &-& 4y &-& 2z &=& 3 & (2)\\
2w &+& 3x &+& 5y &-& z &=& 2 & (3)\\
8w &+& 4x &+& 12y &+& a^2z &=& a+2 & (4)
\end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a-2}$.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \;!$$

b) Invertieren Sie die Matrix Q aus dieser Zerlegung!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls ${}^tA = A$ ist, HERMITEsch, wenn ${}^tA = \overline{A}$ ist, *orthogonal,* wenn ${}^tAA = E$ ist und *unitär*, wenn ${}^t\overline{A}A = E$ ist. Welche dieser vier Eigenschaften hat die Matrix $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$?

b) Was ist A^{-1}?

c) Berechnen Sie $\det(A)$!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!
(Hinweis: Die Eigenwerte sind einstellige ganze Zahlen.)

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Für zwei Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und zwei reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $J_{\lambda\vec{V}+\mu\vec{W}} = \lambda J_{\vec{V}} + \mu J_{\vec{W}}$!

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy} - \sin x \cos y + x^2 + 1 \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}$ des Vektorfelds $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y+z) \\ \sin(xyz) \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Montag, dem 26. September 2005, um 13^{00} Uhr