WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

28. September 2005

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = i$ ist holomorph.

Lösung: *Richtig,* denn jede konstante Funktion ist holomorph. (In den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verschwinden alle vorkommenden Ableitungen.)

2) Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^{2005}}$ für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{it}$?

Lösung: Der Integrand ist meromorph mit einem einzigen Pol bei $z = 0$. Das Residuum dort verschwindet, da die LAURENT-Reihe nur den Term $1/z^{2005}$ enthält. Damit verschwindet nach dem Residuensatz auch das Integral.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $a_{ij} = (i - j)^2$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig,* denn sie ist symmetrisch, hat also lauter reelle Eigenwerte, deren geometrische Vielfachheit jeweils mit der algebraischen übereinstimmt.

4) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = \sin t \cos t$!

Lösung: $\sin t \cos t = \left(\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) \cdot \left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = \dfrac{e^{2it} - e^{-2it}}{4i} = \dfrac{1}{2}\sin 2t\,.$

5) *Richtig oder falsch:* Die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ hat eine nichtkonstante periodische Lösung.

Lösung: *Richtig,* denn das charakteristische Polynom $\lambda^3 - 1$ hat außer der reellen Lösung $\lambda = 1$ auch noch zwei konjugiert komplexe, die auf Sinus- und Kosinusfunktionen führen.

6) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 4y(t)^{4/5}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch:* $y(t) \equiv 0$ und $y(t) = t^5$ sind zwei verschiedene Lösungen.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\,dx$!

Lösung: Für reelles $R > 0$ sei der Integrationsweg γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}\,.$$

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Zur Berechnung von $\displaystyle\int_{\delta_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz$ brauchen wir also zunächst die Pole des Integranden; diese sind die Nullstellen der beiden Faktoren des Nenners, also $z = \pm i$ für den ersten und $z = -2 \pm i$ für den zweiten. Insbesondere sind alle Pole einfach.

Im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises liegen (für $R > \sqrt{13}$) nur die beiden Pole mit dem positiven Imaginärteil; wir brauchen also deren Residuen:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to i} \frac{16z(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{16z}{(z+i)(z^2+4z+5)} = \frac{16i}{2i\cdot(-1+4i+5)} \\
&= \frac{8}{4+4i} = \frac{2}{1+i} = 1-i \\
\operatorname{Res}_{z=-2+i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to -2+i} \frac{16z(z+2-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} \\
&= \lim_{z\to -2+i} \frac{16z}{(z^2+1)(z+2+i)} = \frac{16\cdot(-2+i)}{(4-4i)\cdot 2i} \\
&= \frac{16\cdot(-2+i)}{8+8i} = \frac{-4+2i}{1+i} = \frac{(-4+2i)(1-i)}{2} = -1+3i
\end{aligned}
$$

Nach dem Residuensatz ist daher für $R > \sqrt{13}$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\delta_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz \\
&= 2\pi i \cdot \left(\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} + \operatorname{Res}_{z=-2+3i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} \right) \\
&= 2\pi i \cdot (1-i-1+3i) = -4\pi\,.
\end{aligned}
$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$
\int_{\gamma_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz = \int_0^\pi \frac{16iR^2e^{2it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4Re^{it}+5)}\,dt
$$

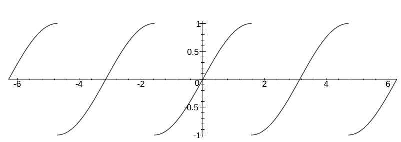
gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ zum Integral über die reelle Achse wird.

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode π, und für $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{2}$ sei $f(t) = \sin t$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist ungerade.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, gibt es nur Sinusterme. Die Periode ist π, also ist $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Der Koeffizienten b_ℓ von $\sin 2\ell t$ ist $b_\ell = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\sin 2\ell t\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \sin 2\ell t\,dt$, was mit der am Ende der Klausur angegebenen Formel für $\int \sin t \sin at\,dt$, angewandt mit $a = 2\ell$, berechnet werden kann:

$$\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(2\ell-1)t}{2\ell-1}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2\ell+1)t}{2\ell+1}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\ell\pi-\frac{\pi}{2})-\sin\big(-(\ell\pi-\frac{\pi}{2})\big)}{2\ell-1} - \frac{\sin(\ell\pi+\frac{\pi}{2})-\sin\big(-(\ell\pi+\frac{\pi}{2})\big)}{2\ell+1}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\ell\pi-\frac{\pi}{2})}{2\ell-1} - \frac{\sin(\ell\pi+\frac{\pi}{2})}{2\ell+1}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell-1} - \frac{(-1)^{\ell}}{2\ell+1}\right) = (-1)^{\ell+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2\ell+1}\right) = \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{\ell+1}\cdot\ell}{4\ell^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Die gesuchte FOURIER-Reihe ist damit $S_f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}\ell}{4\ell^2-1}\sin 2\ell t\,.$

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: Genau an den Unstetigkeitsstellen, also den ungeradzahligen Vielfachen von $\pi/2$. Die Reihe konvergiert dort gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwert, also gegen null.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases}\sin t & \text{für } |t| \le \pi\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$, und geben Sie diese in rein reeller Form an!

Lösung: Nach Definition ist $\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin t\, e^{-i\omega t}\,dt$, was sich nach der im Anhang zur Klausur angegebenen Formel für $\int \sin t\, e^{ct}\,dt$ mit $c = -i\omega$ weiter ausrechnen läßt, wenn man beachtet, daß $\sin(\pm\pi) = 0$ und $\cos(\pm\pi) = -1$ ist:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t}}{1-\omega^2}(-i\omega\sin t - \cos t)\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{-i\pi\omega}-e^{i\pi\omega}}{1-\omega^2} = \frac{-2i\sin\pi\omega}{1-\omega^2} = 2i\frac{\sin\pi\omega}{\omega^2-1}\,.$$

b) Berechnen Sie für $g(\omega) = \dfrac{2\sin\pi\omega}{\omega}$ und $h(\omega) = \pi i\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)$ die Faltung $g * h$!

Lösung: Faltung mit $\delta(\omega - a)$ verschiebt das Argument um a; somit ist

$$g*h(\omega) = 2\pi i\left(\frac{\sin\pi(\omega+1)}{\omega+1} - \frac{\sin\pi(\omega-1)}{\omega-1}\right) = 2\pi i\left(\frac{\sin\pi\omega}{\omega-1} - \frac{\sin\pi\omega}{\omega+1}\right) = 4\pi i\frac{\sin\pi\omega}{\omega^2-1}\,,$$

denn $\sin(t\pm\pi) = -\sin t$.

c) Warum sind die Ergebnisse von *a)* und *b)* (fast) gleich?

Lösung: $g(\omega)$ ist die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses mit Wert eins zwischen $-\pi$ und π und $h(\omega)$ ist die der Sinusfunktion. Multiplikation des Sinus mit dem Rechteckimpuls ergibt die Funktion f; ihre FOURIER-Transformierte ist somit bis auf einen Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ die Faltung der FOURIER-Transformierten der beiden Faktoren.

Aufgabe 4: *(9 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((4-\lambda)^2 - 4\big),$$

was für $\lambda = 2$ und für $\lambda = 4 \pm 2$ verschwindet. $\lambda = 2$ ist also eine doppelte und $\lambda = 6$ eine einfache Nullstelle. Somit hat A die Eigenwerte $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $\lambda = 6$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert zwei werden von der Matrix

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

annuliert; da diese Matrix Rang eins hat, ist der Lösungsraum zweidimensional und wird offensichtlich aufgespannt von den beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat der Eigenwert zwei somit auch die geometrische Vielfachheit zwei.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert sechs werden von der Matrix

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

annuliert. Wie deren zweite und dritte Zeile zeigen, muß die zweite Komponente eines jeden Lösungsvektors gleich der ersten sein, und setzt man dies ein in die erste Zeile, folgt daß auch die erste Komponente denselben Wert haben muß. Der Eigenraum wird somit aufgespannt vom Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Ja,* denn die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts ist gleich der algebraischen.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Bezüglich der Basis aus den Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ hat A die Diagonal- (und damit erst recht Dreiecks-)gestalt $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da N den zweiten Basisvektor auf den ersten abbildet und diesen wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix, und nach der allgemeinen Theorie kommutieren N und D, d.h.

$$e^{\Delta t} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} (E + Nt)$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ als Spalten. Der GAUSS-Algorithmus beginnt mit

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} .$$

Addition der zweiten Zeile zur dritten ergibt links eine obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} .$$

Subtrahieren wir nun noch fünfmal die dritte Zeile von der ersten und zweimal die dritte Zeile von der zweiten, steht links die Einheitsmatrix und rechts die Matrix B^{-1}:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} .$$

Somit ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$e^{At} = B^{-1}e^{\Delta t}B = \begin{pmatrix} e^t & 5e^{2t} - (5+t)e^t & 5e^{2t} - (5+2t)e^t \\ 0 & 2e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - 2e^t \\ 0 & e^t - e^{2t} & 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

a) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - y(t) - z(t), \quad \dot{y}(t) = -y(t) - z(t), \quad \dot{z}(t) = -z(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1\,!$$

Lösung: Da dies ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten ist, gibt es nur die eine Lösung $e^{At}\vec{y}_0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

A ist bereits eine Dreiecksmatrix, und da alle Einträge in der Hauptdiagonale gleich sind, ist klar, daß in der Zerlegung

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die beiden Matrizen D und N miteinander kommutieren, d.h. $e^{At} = e^{Dt}e^{NT}$.
Die Matrix N gehört zur linearen Abbildung, die den zweiten Basisvektor auf den ersten, den dritten auf den zweiten und den ersten auf den Nullvektor abbildet; ihr Quadrat bildet also den dritten Basisvektor auf den ersten ab und die beiden anderen auf den Nullvektor, und ab N^3 verschwinden alle Potenzen von N. Somit ist

$$e^N t = E + Nt + \tfrac{1}{2}N^2 tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und da $e^{Dt} = e^{-Et}$ einfach die Diagonalmatrix mit lauter Einträgen e^{-t} ist, folgt

$$e^{At} = e^{-t} \cdot e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At}\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} (1 + t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} \\ (1 + t)e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

b) Wir verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-t} schneller gegen Null geht als ein Polynom gegen Unendlich gehen kann, nähert sich die Lösung asymptotisch dem Nullvektor.

c) Sind diese Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: *Ja,* denn alle nichtverschwindenden Einträge der Matrix e^{At} gehen für $t \to \infty$ gegen Null, so daß jede Störung weggedämpft wird.

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 10y(t) = 50t$!

Lösung: Die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 10y(t) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = (\lambda + 3)^2 + 1 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -3 \pm i$ und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist somit $y(t) = e^{-3t}(a \cos t + b \sin t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$.
Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier solcher Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können als unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = ct + d$. Dann ist $\ddot{x}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) = c$, die Differentialgleichung führt also auf die Gleichung

$$6c + 10ct + 10d = 50t \quad \text{oder} \quad c = 5 \quad \text{und} \quad 6c + 10d = 50\,,$$

d.h. $d = 2$. Die spezielle Lösung ist also $x(t) = 5t+2$, und damit ist die gesuchte allgemeine Lösung

$$x(t) = 5t + 2 + e^{-3t}(a \cos t + b \sin t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-3t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = 5t + 2$; sie wachsen also allesamt unbeschränkt gegen ∞.