WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

28. September 2005

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = i$ ist holomorph.

2) Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^{2005}}$ für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{it}$?

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $a_{ij} = (i-j)^2$ ist diagonalisierbar.

4) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = \sin t \cos t$!

5) *Richtig oder falsch:* Die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ hat eine nichtkonstante periodische Lösung.

6) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 4y(t)^{4/5}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\,dx$!

Aufgabe 2: (*7 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode π, und für $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{2}$ sei $f(t) = \sin t$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für } |t| \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, und geben Sie diese in rein reeller Form an!

b) Berechnen Sie für $g(\omega) = \dfrac{2\sin \pi\omega}{\omega}$ und $h(\omega) = \pi i\big(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\big)$ die Faltung $g * h$!

c) Warum sind die Ergebnisse von *a)* und *b)* (fast) gleich?

Aufgabe 4: *(9 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

a) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - y(t) - z(t), \quad \dot{y}(t) = -y(t) - z(t), \quad \dot{z}(t) = -z(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1\,!$$

b) Wir verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

c) Sind diese Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 10y(t) = 50t\,!$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{N}\ \mathcal{W}\ \mathcal{E}\ \mathcal{I}\ \mathcal{S}\ \mathcal{E}$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \;\text{ für } n \geq 0$$

$$\int \sin t \sin at \, dt = \frac{1}{2}\frac{\sin(a-1)t}{a-1} - \frac{1}{2}\frac{\sin(a+1)t}{a+1}, \qquad \int \sin t \cos bt \, dt = \frac{1}{2}\frac{\cos(b-1)t}{b-1} - \frac{1}{2}\frac{\cos(b+1)t}{b+1}$$

$$\text{für } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\},$$

$$\int \sin t e^{ct} \, dt = \frac{e^{ct}}{c^2+1}(c \sin t - \cos t) \qquad \text{für } c \in \mathbb{C} \setminus \{+i, -i\}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe, notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.