Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

4. Oktober 2005

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $2x = 3y$ ist ein Untervektorraum.

Lösung: *Richtig:* Die Abbildung, die jedem Vektor aus $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ die Differenz $2x - 3y$ zuordnet, ist linear, und damit ist M als Kern dieser linearen Abbildung ein Untervektorraum.

2) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $\det A = 1$ oder $\det A = -1$.

Lösung: *Richtig,* denn $(\det A)^2 = \det A^2 = \det E = 1$.

3) Bestimmen Sie die Determinante der 6×6-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Vertauscht man die erste Zeile mit der letzten, die zweite mit der vorletzten und die dritte mit der vierten, erhält man eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $1, 2, 3, 3, 1, 1$ und somit Determinante $3! \times 3 = 18$. Die drei Vertauschungen führen zu drei Vorzeichenwechseln, also ist $\det A = -36$. (Dieselben Operationen mit Spalten führen auf eine untere Dreiecksmatrix und natürlich dasselbe Endergebnis.)

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^3;\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}$ ist linear.

Lösung: *Falsch,* denn

$$\varphi\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) + \varphi\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{aber} \quad \varphi\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5i \\ 3i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 5i \cdot (-i) = 5$; daher bildet $\vec{v}_1$ zusammen mit $\vec{w} = \vec{v}_2 - 5\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3i \end{pmatrix}$ eine Orthogonalbasis. $\vec{v}_1$ hat bereits die Länge eins, die von $\vec{w}$ ist $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Somit bilden v_1 und $\frac{1}{5}\vec{w}$ eine Orthonormalbasis.

6) *Richtig oder falsch:* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} \le 0\,?$

Lösung: *Falsch,* denn der Integrand ist im gesamten Integrationsbereich positiv. (Da der Integrand an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, existiert das Integral nicht, auch kein CAUCHYscher Hauptwert).

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades von $f(x, y) = x\cos(xy) + ye^{xy}$ um den Nullpunkt!

Lösung: Das ist x mal das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $\cos xy$ plus y mal dem TAYLOR-Polynom zweiten Grades von e^{xy}. In $\cos xy$ wie auch e^{xy} hat der Term $\frac{(xy)^2}{2}$ bereits Grad vier, die TAYLOR-Polynome zweiten Grades sind also die Konstante eins *bzw.* $1 + xy$, und das gesuchte Polynom ist $x + y(1 + xy) = x + y + xy^2$.

8) Was ist $\operatorname{rot}(\nabla f)$ für $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$?

Lösung: *Das Nullvektorfeld,* denn die Rotation eines Gradienten verschwindet.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

M sei die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax^{-2} + bx^{-1} + c + dx + ex^2$ mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, und V sei der von M in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ erzeugte Untervektorraum. ($\mathbb{R}^+ =$ Menge der positiven reellen Zahlen.)

a) Ist $V = M$, d.h. ist M bereits ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Lösung: *Ja,* denn offensichtlich ist jede Linearkombination von Linearkombinationen der Funktionen $x^{-2}, x^{-1}, 1, x$ und x^2 wieder eine Linearkombination dieser Funktionen.

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Die Funktionen $x^{-2}, x^{-1}, 1, x$ und x^2 bilden offensichtlich ein Erzeugendensystem. Sie sind auch linear unabhängig, denn ist $\lambda x^{-2} + \mu x^{-1} + \nu + \rho x + \sigma x^2 \equiv 0$, so zeigt Multiplikation mit x^2, daß das Polynom $\lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho x^3 + \sigma x^4$ alle positiven reellen Zahlen als Nullstellen hat und somit das Nullpolynom sein muß, d.h. $\lambda = \mu = \nu = \rho = \sigma = 0$.

c) Zeigen Sie: $f(x) \mapsto \dfrac{d}{dx}\big(xf(x)\big) + f(x)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Für $f(x) = ax^{-2} + bx^{-1} + c + dx + ex^2$ hat $xf(x)$ die Ableitung

$$\frac{d}{dx}\big(xf(x)\big) = -ax{-}2 + c + 2dx + 3ex^2\,;$$

addiert man $f(x)$, erhält man die explizite Darstellung

$$\varphi\big(f(x)\big) = bx^{-1} + 2c + 3dx + 4ex^2\,,$$

also offensichtlich wieder eine Funktion aus V.

Auch die Linearität ist klar, denn sowohl das Differenzieren als auch die Addition von Funktionen sind lineare Operationen. Ausführlich und formal: Für $f, g \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g) &= \frac{d}{dx}\big(x(\lambda f + \mu g)(x)\big) + (\lambda f + \mu g)(x)\\ &= \frac{d}{dx}\big(\lambda\, xf(x)\big) + \lambda f(x) + \frac{d}{dx}\big(\mu\, xg(x)\big) + \mu g(x)\\ &= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.\end{aligned}$$

d) Welche Dimensionen haben Kern φ und Bild φ?

Lösung: Wie die explizite Darstellung von φ in *c)* zeigt, besteht der Kern genau aus den Vielfachen von x^{-2}, hat also die Dimension eins. Nach der Dimensionsformel ist daher $\dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Kern} \varphi = 5 - 1 = 4$.

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *b)*?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; wie die explizite Formel aus *c)* zeigt, werden diese jeweils auf Vielfache von sich selbst abgebildet; die Abbildungsmatrix ist also einfach die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

f) Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

Lösung: Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind die Diagonaleinträge, also $0, 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 1 && (1) \\ 2x - y - z &= 1 && (2) \\ (2a-1)x - 2ay + (a^2+2)z &= -a - 4 && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist $z = 1/a$. Achten Sie beim Abschreiben der Gleichungen auf die Minuszeichen vor z in den ersten beiden Gleichungen!*

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) addieren wir die erste Gleichung zweimal zur zweiten und $(2a-1)$ mal zur dritten:

$$\begin{aligned} y - 3z &= 3 && (4) \\ -y + (a^2 - 2a + 3)z &= a - 5 && (5) \end{aligned}$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist

$$(a^2 - 2a)z = a - 2 \quad \text{oder} \quad a(a-2)z = a - 2\,.$$

Für $a = 0$ steht hier $0 = -2$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem somit unlösbar.
Für $a = 2$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die von jeder reellen Zahl $z = \lambda$ erfüllt wird.
Für $a \neq 0, 2$ schließlich können wir durch $a(a-2)$ dividieren und erhalten die einzige Lösung

$$z = \frac{1}{a}\,.$$

Nach Gleichung (4) ist dann $y = 3z + 3 = \begin{cases} 3 + \frac{3}{a} & \text{für } a \neq 0, 2 \\ 3 + 3\lambda & \text{für } a = 2 \end{cases}$,

und nach Gleichung (1) ist $x = y - z - 1 = 2z + 2 = \begin{cases} 2 + \frac{2}{a} & \text{für } a \neq 0, 2 \\ 2 + 2\lambda & \text{für } a = 2 \end{cases}$.

Somit ist $\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(2 + \frac{2}{a}, 3 + \frac{3}{a}, \frac{1}{a}\right)\right\} & \text{für } a \neq 0, 2 \\ \left\{(2 + 2\lambda, 3 + 3\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = 2 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$!

Lösung: Da A und damit auch $A - \lambda E$ Dreiecksmatrizen sind, ist das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = (5 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

einfach das Produkt der Hauptdiagonaleinträge und verschwindet für $\lambda = 0, 3$ und 5. Die Eigenwerte sind sind also 1, 3 und 5.

$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; für einen Vektor $\vec{v}_1$ mit $(A - E)\vec{v}_1 = \vec{0}$ muß also sowohl die erste als auch die dritte Komponente gleich dem Negativen der zweiten sein, d.h. der Eigenraum zum Eigenwert eins wird aufgespannt von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ annuliert genau die Vektoren, deren erste Komponente verschwindet, während die dritte das (-2)-fache der zweiten ist; der Eigenraum zum Eigenwert drei wird also aufgespannt von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Da in den Spalten einer Matrix die Produkte mit den Koordinateneinheitsvektoren stehen, ist schließlich auch ohne Rechnung klar, daß der dritte Koordinateneinheitsvektor den Eigenraum zum Eigenwert fünf aufspannt.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die Koeffizienten a und b der Ausgleichsgeraden $y = ax + b$ durch die drei Datenpunkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(2, 4)$!

Lösung: Lägen die drei Punkte wirklich auf einer Geraden $ax + b = y$, hätten wir die drei Gleichungen

$$0 \cdot a + b = 0, \quad 1 \cdot a + b = 1 \quad \text{und} \quad 2 \cdot a + b = 4\,,$$

also das lineare Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist natürlich unlösbar; das gesuchte Gleichungssystem entsteht daraus durch Multiplikation mit der transponierten Matrix von A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

das gesuchte LGS ist also $\quad 5a + 3b = 9 \quad$ und $\quad 3a + 3b = 5\,.$

b) Geben Sie die Geradengleichung explizit an!

Lösung: Fünfmal die zweite minus dreimal die erste Gleichung führt auf $6b = -2$, also $b = -\frac{1}{3}$. Einsetzen in die zweite Gleichung zeigt, daß dann $3a - 1 = 5$, also $a = 2$ ist. Die gesuchte Geradengleichung ist demnach $y = 2x - \frac{1}{3}$.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin x \cos y + 2\cos xy + 3x + 4y + 5 \end{cases} \quad !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \cos x \cos y - 2y \sin xy + 3 \\ f_y(x,y) &= -\sin x \sin y - 2x \sin xy + 4 \\ f_{xx}(x,y) &= -\sin x \cos y - 2y^2 \cos xy \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -\cos x \sin y - 2xy \cos xy - 2 \sin xy \\ f_{yy}(x,y) &= -\sin x \cos y - 2x^2 \cos xy \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - 2y \sin xy + 3 \\ -\sin x \sin y - 2x \sin xy + 4 \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y - 2y^2 \cos xy & -\cos x \sin y - 2xy \cos xy - 2 \sin xy \\ -\cos x \sin y - 2xy \cos xy - 2 \sin xy & -\sin x \cos y - 2x^2 \cos xy \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{e^{\cos x}} \\ \left(\dfrac{x+y}{1+x^2}\right)^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad !$$

Lösung: Die erste Komponente $xy/e^{\cos x} = xye^{-\cos x}$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen

$$(y + xy \sin x)e^{-\cos x} \quad \text{und} \quad xe^{-\cos x};$$

für die zweite Komponente $\left(\dfrac{x+y}{1+x^2}\right)^2$ erhalten wir entsprechend (nach der Kettenregel)

$$2\left(\frac{x+y}{1+x^2}\right)\left(\frac{1+x^2-2x^2-2xy}{(1+x^2)^2}\right) = 2\frac{(x+y)(1-x^2-2xy)}{(1+x^2)^3} \quad \text{und} \quad 2\frac{x+y}{(1+x^2)^2}.$$

Also ist

$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y+xy\sin x}{e^{\cos x}} & \frac{x}{e^{\cos x}} \\ \frac{2(x+y)(1-x^2-2xy)}{(1+x^2)^3} & 2\frac{x+y}{(1+x^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = \frac{y + xy \sin x}{e^{\cos x}} + 2\frac{x+y}{(1+x^2)^2}.$$