Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*4. Oktober 2005*

# Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

**Fragen:** *(je* **zwei** *Punkte)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1) Richtig oder falsch:* Die Menge $M$ aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $2x = 3y$ ist ein Untervektorraum.

*2) Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $\det A = 1$ oder $\det A = -1$.

*3)* Bestimmen Sie die Determinante der $6 \times 6$-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ !

*4) Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^3;\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}$ ist linear.

*5)* Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5i \\ 3i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$ !

*6) Richtig oder falsch:* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} \le 0$ ?

*7)* Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von $f(x,y) = x\cos(xy) + ye^{xy}$ um den Nullpunkt!

*8)* Was ist $\operatorname{rot}(\nabla f)$ für $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ?

**Aufgabe 1:** *(9 Punkte)*
$M$ sei die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax^{-2} + bx^{-1} + c + dx + ex^2$ mit $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$, und $V$ sei der von $M$ in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ erzeugte Untervektorraum.
($\mathbb{R}^+ =$ Menge der positiven reellen Zahlen.)

*a)* Ist $V = M$, d.h. ist $M$ bereits ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

*b)* Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$!

*c)* Zeigen Sie: $f(x) \mapsto \dfrac{d}{dx}\bigl(xf(x)\bigr) + f(x)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

*d)* Welche Dimensionen haben Kern $\varphi$ und Bild $\varphi$ ?

*e)* Welche Abbildungsmatrix hat $\varphi$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *b)*?

*f)* Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

• • • **Bitte wenden!** • • •

**Aufgabe 2:** *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcll} -x + \quad y - \quad\quad z &=& 1 & (1) \\ 2x - \quad y - \quad\quad z &=& 1 & (2) \\ (2a-1)x - 2ay + (a^2+2)z &=& -a-4 & (3) \end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (**nur** zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist $z = 1/a$. Achten Sie beim Abschreiben der Gleichungen auf die Minuszeichen vor $z$ in den ersten beiden Gleichungen!*

**Aufgabe 3:** *(6 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$!

**Aufgabe 4:** *(5 Punkte)*

*a)* Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die Koeffizienten $a$ und $b$ der Ausgleichsgeraden $y = ax + b$ durch die drei Datenpunkte $(0,0)$, $(1,1)$ und $(2,4)$!

*b)* Geben Sie die Geradengleichung explizit an!

**Aufgabe 5:** *(6 Punkte)*

*a)* Berechnen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin x \cos y + 2\cos xy + 3x + 4y + 5 \end{cases} !$$

*b)* Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{e^{\cos x}} \\ \left(\dfrac{x+y}{1+x^2}\right)^2 \end{pmatrix} \end{cases} !$$

## $\mathcal{HILFSMITTEL}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

**Abgabe** bis zum Dienstag, dem 4. Oktober 2005, um $10^{15}$ Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •