Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. Juli 2005

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die symmetrischen reellen 3×3-Matrizen bilden einen Vektorraum.

Lösung: *Richtig;* sie bilden eine Teilmenge des Vektorraums aller 3×3-Matrizen, und diese ist nach dem Untervektorraumkriterium Untervektorraum, da sie die Nullmatrix enthält und auch jede Linearkombination symmetrischer Matrizen wieder symmetrisch ist.

2) *Richtig oder falsch:* Sind die Elemente $f_1, \dots, f_r$ des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbarer Funktionen linear unabhängig, so sind auch ihre Quadrate $f_1^2, \dots, f_r^2$ in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise sind die drei Funktionen $1, \sin x$ und $\cos x$ linear unabhängig, nicht aber ihre Quadrate, da $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$ eine nichttriviale Darstellung der Nullfunktion ist.

3) Geben Sie die Vektoren aus $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{F}_2 \right\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$ explizit an und entscheiden Sie, ob E ein Untervektorraum ist!

Lösung: λ und μ können nur die Werte null und eins annehmen; somit gibt es die vier Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E ist ein Untervektorraum, denn E enthält den Nullvektor und mit zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auch deren Summe: Wie die letzte Gleichung zeigt, ist die Summe der drei von $\vec{0}$ verschiedenen Vektoren aus E der Nullvektor; da es über $\mathbb{F}_2$ keinen Unterschied zwischen plus und minus gibt, ist also die Summe von jeweils zwei dieser Vektoren gleich dem dritten und somit wieder in E.

4) Was ist $M = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; 1000x \equiv 1 \bmod 2\,07\,2005 \right\}$?

Lösung: M enthält genau die Zahlen $x \in \mathbb{Z}$, zu denen es ein $y \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $1000x = 1 + 2\,07\,2005\, y$ ist. Da $1000x$ und $2\,07\,2005\, y$ für $x, y \in \mathbb{Z}$ stets durch fünf teilbar sind, kann es offensichtlich keine solchen Paare $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ geben, d.h. $M = \emptyset$.

5) Was ist $\det\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&2&2\\ 0&0&0&3&3&3\\ 0&0&4&4&4&4\\ 0&5&5&5&5&5\\ 6&6&6&6&6&6 \end{pmatrix}$?

Lösung: Vertaucht man die erste Spalte mit der letzten, die zweite mit der vorletzen und die dritte mit der vierten, wird die gegebene Matrix zur unteren Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 2&2&0&0&0&0\\ 3&3&3&0&0&0\\ 4&4&4&4&0&0\\ 5&5&5&5&5&0\\ 6&6&6&6&6&6 \end{pmatrix},$$

deren Determinante das Produkt der Diagonalelemente, also $6! = 720$ ist. Drei Vertauschungen ergeben drei Vorzeichenwechsel, also ist die gesuchte Determinante gleich -720. Alternativ kann man den LAPLACEschen Entwicklungssatz benutzen:

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&2&2\\ 0&0&0&3&3&3\\ 0&0&4&4&4&4\\ 0&5&5&5&5&5\\ 6&6&6&6&6&6 \end{vmatrix} = (-6)\begin{vmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&2&2\\ 0&0&3&3&3\\ 0&4&4&4&4\\ 5&5&5&5&5 \end{vmatrix} = (-6)(+5)\begin{vmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&2&2\\ 0&3&3&3\\ 4&4&4&4 \end{vmatrix}$$

$$= (-6)(+5)(-4)\begin{vmatrix} 0&0&1\\ 0&2&2\\ 3&3&3 \end{vmatrix} = (-6)(+5)(-4)(+3)\begin{vmatrix} 0&1\\ 2&2 \end{vmatrix} = (-6)(+5)(-4)(+3)(-2)\cdot 1\,.$$

6) Die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ für $a \geq 0$ seien die Hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$. Was ist $f(x, y)$ und was ist D?

Lösung: Da $x^2 - y^2 = a^2 \geq 0$ sein muß, ist $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |x| \geq |y|\big\}$. Die Beziehung $f(x, y) = a \iff x^2 - y^2 = a^2$ führt sofort auf $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

7) *Richtig oder falsch:* Wenn für ein Vektorfeld $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ in einem Punkt $x \in D$ die Rotation verschwindet, ist $J_{\vec{V}}(x)$ eine symmetrische Matrix.

Lösung: *Richtig,* denn zerlegt man die JACOBI-Matrix in ihren symmetrischen und ihren antisymmetrischen Anteil, so sind die Einträge des antisymmetrischen Anteils bis aufs Vorzeichen genau die Komponenten von $\operatorname{rot}\vec{V}$.

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)

$M \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bestehe aus allen Polynomen vom Grad höchstens zwei sowie aus allen Produkten solcher Polynome mit e^x.

a) Ist M ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Lösung: *Nein,* denn beispielsweise liegen x und xe^x in M, nicht aber deren Summe $x + xe^x$.

b) $V = [M]$ sei der von M erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Offenbar kann jedes Element von V als Linearkombination der sechs Funktionen

$$1, x, x^2, e^x, xe^x, x^2e^x$$

geschrieben werden. Diese Funktionen sind auch linear unabhängig, denn sind in einer Darstellung

$$a + bx + cx^2 + ke^x + \ell xe^x + mx^2e^x = 0$$

k, ℓ, m nicht allesamt gleich null, so läßt sich

$$e^x = -\frac{a + bx + cx^2}{k + \ell x + mx^2}$$

als rationale Funktion darstellen, was offensichtlich nicht möglich ist: Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede rationale Funktion. Im Falle $k = \ell = m = 0$ ist $a + bx + cx^2$ das Nullpolynom, also auch $a = b = c = 0$. Somit können wir als Basis von V das System $\mathcal{B} = (1, x, x^2, e^x, xe^x, x^2e^x)$ aus diesen sechs Funktionen nehmen.

c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f' - f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$!

Lösung: Zunächst müssen wir uns überlegen, daß $\varphi(f)$ für ein Element $f \in V$ wieder in V liegt. Dazu reicht es, die Bilder der Basisvektoren zu betrachten, die wir nachher in *e)* ohnehin brauchen.
Für ein Polynom p vom Grad höchstens zwei ist

$$\varphi\bigl(p(x)e^x\bigr) = \frac{d\bigl(p(x)e^x\bigr)}{dx} - p(x)e^x = p'(x)e^x + p(x)e^x - p(x)e^x = p'(x)e^x\,;$$

die Bilder der Basisvektoren sind daher

$$\varphi(1) = -1, \quad \varphi(x) = 1 - x, \quad \varphi(x^2) = 2x - x^2, \quad \varphi(e^x) = 0, \quad \varphi(xe^x) = e^x$$

und $\varphi(x^2e^x) = 2xe^x$; sie liegen allesamt in V.
Als nächstes muß die Linearität nachgewiesen werden: Für $f, g \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)' - (\lambda f + \mu g) = \lambda f' + \mu g' - (\lambda f + \mu g) = \lambda(f' - f) + \mu(g' - g)\\ &= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.\end{aligned}$$

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

Lösung: Wir bestimmen zunächst den Kern von φ: Nach obigen Formeln für die Bilder der Basisfunktionen ist

$$\begin{aligned}\varphi(a + bx + cx^2 + ke^x + \ell xe^x + mx^2e^x) &= -a + b(1 - x) + c(2x - x^2) + \ell e^x + 2mxe^x\\ &= (b - a) + (2c - b)x - cx^2 + \ell e^x + 2mxe^x\,.\end{aligned}$$

Falls dies die Nullfunktion ist, folgt

$$b - a = 2c - b = c = \ell = m = 0 \Longrightarrow a = b = c = \ell = m = 0\,.$$

Der Kern von φ besteht also genau aus den Vielfachen der Exponentialfunktion und hat daher Dimension eins. Nach der Dimensionsformel ist

$$\dim \mathrm{Bild}\ \varphi = \dim V - \dim \mathrm{Kern}\ \varphi = 6 - 1 = 5\,.$$

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *b)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Basisdarstellung der Bilder der Basisvektoren; letztere kennen wir aus *c)* und erhalten die Abbildungsmatrix daher sofort als

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcll} w + 2x + 3y + 4z &=& 0 & (1) \\ 3w + 7x + 14y + 14z &=& 8 & (2) \\ 2w + 3x + 2y + 9z &=& -6 & (3) \\ w - 7y + (a^2-3a)z &=& a-16 & (4) \end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a-3}$.

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzen drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung dreimal von der zweiten, zweimal von der dritten und einmal von der vierten:

$$\begin{array}{rcll} x + 5y + 2z &=& 8 & (5) \\ -x - 4y + z &=& -6 & (6) \\ -2x - 10y + (a^2-3a-4)z &=& a-16 & (7) \end{array}$$

Als nächstes soll x aus den Gleichungen (6) und (7) eliminiert werden; dazu addieren wir Gleichung (5) einmal zu (6) und zweimal zu (7):

$$\begin{array}{rcll} y + 3z &=& 2 & (8) \\ (a^2-3a)z &=& a & (9) \end{array}$$

In der letzten Gleichung kommt nur noch die Variable z vor; falls $a^2 - 3a \neq 0$ ist, können wir durch diesen Koeffizienten dividieren und erhalten

$$z = \frac{a}{a^2-3a} = \frac{1}{a-3} \qquad \textit{falls} \quad a \notin \{0, 3\}.$$

Für $a = 3$ ist (9) die unlösbare Gleichung $0z = 3$; in diesem Fall ist also das gesamte lineare Gleichungssystem unlösbar. Für $a = 0$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die keinerlei Bedingung anz stellt; wir können also für z jede reelle Zahl λ einsetzen.

Nach (8) folgt $y = 2 - 3z = \begin{cases} 2 - \dfrac{3}{a-3} = \dfrac{2a-9}{a-3} & \text{für } a \neq 0,3 \\ 2 - 3\lambda & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Sodann zeigt Gleichung (5), daß gilt

$$x = 8 - 5y - 2z = 13z - 2 = \begin{cases} \dfrac{13}{a-3} - 2 = \dfrac{19-2a}{a-3} & \text{für } a \neq 0,3 \\ 13\lambda - 2 & \text{für } a = 0 \end{cases}.$$

Entsprechend folgt aus Gleichung (1), daß

$$w = -2x - 3y - 4z = -21z - 2 = \begin{cases} -\dfrac{21}{a-3} - 2 = -\dfrac{2a+15}{a-3} & \text{für } a \neq 0,3 \\ -21\lambda - 2 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

ist. Die Lösungsmenge ist daher

$$\mathcal{L}_a = \left\{\left(-\frac{21}{a-3} - 6,\ \frac{13}{a-3} - 2,\ \frac{3}{a-3},\ \frac{1}{a-3}\right)\right\} \quad \text{für } a \neq 0,3,$$
$$\mathcal{L}_0 = \left\{(-21\lambda - 2, 13\lambda - 2, 2 - 3\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_3 = \emptyset\,.$$

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums U von $\mathbb{R}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis dieses Untervektorraums. Als ersten Vektor können wir $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$ wählen; wegen

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

ist der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis $\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\vec{v}_1$.

Für den zweiten Vektor der Orthogonalbasis machen wir den Ansatz $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + \lambda\vec{b}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$ ist. Da

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = 25$$

gleich dem Quadrat der Länge von $\vec{v}_1$ ist, folgt $\lambda = -1$ und

$$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Auch dieser Vektor hat die Länge fünf, der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{q}_2 = \frac{1}{5}\vec{b}_2$.

Für den noch fehlenden dritten Vektor der Orthogonalbasis ist der Ansatz entsprechend:

$$\vec{b}_3 = \vec{v}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = 0\,.$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (10 + 12 + 6 - 3) + 25\lambda \Longrightarrow \lambda = -1$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = (10 - 3 + 6 + 12) + 25\mu \Longrightarrow \mu = -1$$
$$\vec{b}_3 = \vec{v}_3 - \vec{b}_1 - \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{2}$; als Orthonormalbasis können wir also die drei Vektoren

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{q}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{q}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nehmen.

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf U!

Lösung: Ist $\vec{q}_4$ irgendein Vektor aus $\mathbb{R}^4$, der zusammen mit $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$ eine Orthonormalbasis bildet, so läßt sich jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ schreiben als

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{q}_1)\vec{q}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_2)\vec{q}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_3)\vec{q}_3 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_4)\vec{q}_4 \,;$$

seine orthogonale Projektion nach U ist die Summe der ersten drei Summanden der rechten Seite, die nach $U^\perp$ ist der letzte Summand. Die gesuchte Projektion ist somit

$$\frac{2}{5}\vec{q}_1 + \frac{2}{5}\vec{q}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{q}_3 = \frac{2}{25}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{25}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 41 \\ 12 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

c) Ergänzen Sie die in *a)* gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$. *(Hinweis: Sie können z.B. b) verwenden.)*

Lösung: Die orthogonale Projektion des ersten Einheitsvektors nach $U^\perp$ ist

$$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 41 \\ 12 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf U, also insbesondere auf $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$. Seine Länge ist

$$\frac{1}{50}\sqrt{9^2 + 12^2 + 9^2 + 12^2} = \frac{3\sqrt{2(3^2+4^2)}}{50} = \frac{3\sqrt{2}}{10}\,;$$

als vierten Vektor einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ können wir also $\vec{q}_4 = \frac{\sqrt{2}}{30}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ nehmen.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Eine Matrix heißt *symmetrisch*, falls ${}^tA = A$ ist, HERMITEsch, wenn ${}^tA = \overline{A}$ ist, *orthogonal,* wenn ${}^tAA = E$ ist und *unitär*, wenn ${}^t\overline{A}A = E$ ist. Welche dieser vier Eigenschaften hat die Matrix $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & i & i \\ -i & -1 & 1 & -1 \\ -i & 1 & -1 & -1 \\ -i & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Lösung: Offensichtlich ist ${}^tA \neq A$, da $a_{12} \neq a_{21}$ ist; die Matrix ist also nicht symmetrisch. Sie ist aber HERMITEsch, denn beim Spiegeln an der Hauptdiagonalen bleiben alle reellen Einträge erhalten, während die Einträge $\pm i$ ihr Vorzeichen wechseln.

${}^tAA$ ist offensichtlich nicht die Einheitsmatrix: Der Eintrag links oben ist das Produkt der ersten Zeile von ${}^tA$ mit der ersten Spalte von A, also das Produkt

$$\frac{1}{4}\left(1^2 + (-i)^2 + (-i)^2 + (-i)^2\right) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

der ersten Spalte von A mit sich selbst, und das ist nicht eins. Somit ist A nicht orthogonal. A ist aber unitär, denn ${}^t\overline{A} \cdot A$ ist die Einheitsmatrix.

b) Was ist A^{-1}?

Lösung: Für eine unitäre Matrix ist $A^{-1} = {}^t\overline{A}$; da A HERMITEsch ist, folgt speziell für diese Matrix, daß $A^{-1} = A$ ist.

c) Was können Sie ohne Rechnen über $\det(A)$ sagen?

Lösung: Da A unitär ist, muß $|\det A| = 1$ sein. Da hier aber auch A^2 gleich der Einheitsmatrix ist, muß sogar $(\det A)^2 = 1$ sein, also $\det A \in \{+1, -1\}$. (Tatsächlich ist $\det A = 1$, aber danach war nicht gefragt.)

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$!

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (4-\lambda)\big((3-\lambda)(2-\lambda) - 2\big) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)\,.$$

Die beiden Nullstellen von $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ haben Produkt vier und Summe fünf, sind also eins und vier. Somit ist vier doppelte und eins einfache Nullstelle des Polynoms; die gesuchten Eigenwerte sind eins und vier.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ erfüllen das lineare Gleichungssystem $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$ oder

$$2x + 2y = 0, \qquad x + y = 0 \qquad 4x + 4y + 3z = 0\,;$$

also muß $x = -y$ und $z = 0$ sein. Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 4$ erfüllen des lineare Gleichungssystem $(A - 4E)\vec{v} = \vec{0}$ oder

$$-x + 2y = 0, \qquad x - 2y = 0 \quad \text{und} \quad 4x + 4y = 0\,.$$

Hier muß offensichtlich $x = y = 0$ sein, während es für z keine Bedingungen gibt; die gesuchten Eigenvektoren sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Lösung: Wenn es eine solche Basis gäbe, müßte sie aus drei linear unabhängigen Eigenvektoren bestehen; da es nur zwei gibt, kann keine solche Basis existieren.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

Lösung: $\operatorname{grad}(f \cdot g)$ hat $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}$ als i-te Komponente, und das ist nach der LEIBNIZ-Regel gleich $g\dfrac{\partial f}{\partial x_i} + f\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$. Das ist aber gerade die i-te Komponente von $f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(xy) - \cos(x+y) \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

Lösung: Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differennzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\cos(xy) + \sin(x+y) \\ f_y(x,y) &= x\cos(xy) + \sin(x+y) \\ \nabla f(x,y) &\begin{pmatrix} y\cos(xy) + \sin(x+y) \\ x\cos(xy) + \sin(x+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß $f_{xy} = f_{yx}$ ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -y^2\sin(xy) + \cos(x+y) \\ f_{xy}(x,y) &= -xy\sin(xy) + \cos(xy) + \cos(x+y) \\ f_{yy}(x,y) &= -x^2\sin(xy) + \cos(x+y) \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(x,y)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} -y^2\sin(xy) + \cos(x+y) & -xy\sin(xy) + \cos(xy) + \cos(x+y) \\ -xy\sin(xy) + \cos(xy) + \cos(x+y) & -x^2\sin(xy) + \cos(x+y) \end{pmatrix}.$$