WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

2. Juli 2005

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die symmetrischen reellen 3×3-Matrizen bilden einen Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: Sind die Elemente $f_1, \dots, f_r$ des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbarer Funktionen linear unabhängig, so sind auch ihre Quadrate $f_1^2, \dots, f_r^2$ in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig.

3) Geben Sie die Vektoren aus $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{F}_2 \right\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$ explizit an und entscheiden Sie, ob E ein Untervektorraum ist!

4) Was ist $M = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1000x \equiv 1 \bmod 2\,07\,2005 \}$?

5) Was ist $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$?

6) Die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ für $a \geq 0$ seien die Hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$. Was ist $f(x, y)$ und was ist D?

7) Richtig oder falsch: Wenn für ein Vektorfeld $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ in einem Punkt $x \in D$ die Rotation verschwindet, ist $J_{\vec{V}}(x)$ eine symmetrische Matrix.

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
$M \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bestehe aus allen Polynomen vom Grad höchstens zwei sowie aus allen Produkten solcher Polynome mit e^x.

a) Ist M ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

b) $V = [M]$ sei der von M erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

c) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f' - f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$!

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *b)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrl}
w + 2x + 3y + 4z &=& 0 & (1)\\
3w + 7x + 14y + 14z &=& 8 & (2)\\
2w + 3x + 2y + 9z &=& -6 & (3)\\
w - 7y + (a^2 - 3a)z &=& a - 16 & (4)
\end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a-3}$.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2\\4\\2\\-1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4\\3\\4\\3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5\\3\\3\\3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums U von $\mathbb{R}^4$!

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ auf U !

c) Ergänzen Sie die in *a)* gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$. *(Hinweis: Sie können z.B. b) verwenden.)*

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Eine Matrix heißt *symmetrisch*, falls ${}^tA = A$ ist, HERMITEsch, wenn ${}^tA = \overline{A}$ ist, *orthogonal,* wenn ${}^tAA = E$ ist und *unitär*, wenn ${}^t\overline{A}A = E$ ist. Welche dieser vier Eigenschaften hat die Matrix $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & i & i\\ -i & -1 & 1 & -1\\ -i & 1 & -1 & -1\\ -i & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

b) Was ist A^{-1}?

c) Was können Sie ohne Rechnen über $\det(A)$ sagen?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$!

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(xy) - \cos(x+y) \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 2. Juli 2005, um 13^{00} Uhr