

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Juli 2005

- a) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ hänge, in Polarkoordinaten (r, φ) geschrieben, nur ab von φ . Wie sehen die Niveaulinien von f aus?
- b) Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ hänge, in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) geschrieben, nur ab von ϑ . Wie sehen die Niveauflächen von f aus?
- c) Das Vektorfeld \vec{V} auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ordne dem Punkt mit Polarkoordinaten (r, φ) den Vektor $\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ aus \mathbb{R}^2 zu. Zeigen Sie, daß dieser Vektor in jedem Punkt (x, y) senkrecht auf dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ steht!
- d) Bestimmen Sie durch Übergang zu Polarkoordinaten alle relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2)$!
- e) Lösen Sie Aufgabe 2b) des elften Übungsblatt mit Hilfe von Polarkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\Delta \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ für beliebiges $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und zeigen Sie, daß dies genau für $n = \frac{1}{2}$ verschwindet!
- f) Eine Boeing 727 braucht zum Abheben eine Geschwindigkeit von mindestens 200 Meilen pro Stunde; sie kann aus dem Stand innerhalb von 30 sec auf diese Geschwindigkeit beschleunigen. Falls Sie von einer konstanten Beschleunigung ausgehen: Wie lange (in Meilen) muß die Startbahn mindestens sein?
- g) Berechnen Sie $I_1 = \int \frac{12x^2 + 4x - 1}{4x^3 + 2x^2 - x + 7} dx$ und $I_2 = \int \frac{1}{x \ln x} dx$!
- h) Berechnen Sie für $x > 0$ das Integral $I(x) = \int_{-x}^x te^{-t^2} dt$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} I(x)$!
- i) Berechnen Sie für $x > 0$ das Integral $J(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} J(x)$?
- j) Was ist $\int \cos(3x + 5) dx$?
- k) Berechnen Sie $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ durch partielle Integration und, unabhängig davon, über die EULERSchen Formeln!
- l) Was ist und wo existiert die Ableitung von $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$?
- m) Was ist $\int \arcsin x dx$?
- n) Bestimmen Sie $I_1 = \int \frac{dx}{1 - x^4}$, $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$ und $I_3 = \int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 1}$!
- o) Was ist $\int_{-\pi}^{\pi} \sinh x \cosh x dx$?
- p) Existieren die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} dt$, $\int_0^{\infty} e^{-t} \sin 3t dt$ und $\int_1^{\infty} \ln t dt$?
- q) Finden Sie zu einer vorgegebenen Zahl $c \in [-2, 2]$ zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a_n}^{b_n} \sin x dx = c.$$