Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22. Juni 2005

a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$, $k = 1, \dots, 100$!

b) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{C}$?

$$\|z\|_1 = |z|\,, \qquad \|z\|_2 = \Re z + \Im z, \qquad \|z\|_3 = \max(\Re z, \Im z),$$
$$\|z\|_4 = \max(|\Re z|\,, |\Im z|), \qquad \|z\|_5 = (\Re z)(\Im z), \qquad \|z\|_6 = (\Re z)^2 + (\Im z)^2$$

c) Zeigen Sie mit irgendeiner der Vorschriften, die Normen definieren, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ bezüglich dieser Norm in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig ist!

d) M sei der Vektorraum aller reeller $n \times m$-Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M?

$$\|A\|_1 = \max_{(i,j)} |a_{ij}|\;, \quad \|A\|_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|\;, \quad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2\,, \quad \|A\|_4 = \max_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^m a_{ij}^2}$$

e) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus $\mathbb{R}^2$ sind konvergent für $n \to \infty$, und wohin konvergieren sie?
1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n, y_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$

f) Was können Sie über eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

g) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x, y) = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$ geometrisch!

h) Wo ist die Funktion f aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

i) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz$
$g(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy)$ $\qquad h(x, y, z) = \frac{x+y}{x-z}$
$k(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\qquad \ell(x, y, z) = ax + by + cz + d$

j) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die Jacobi-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

k) Berechnen Sie die Hesse-Matrizen der folgenden Funktionen:

$f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ $\qquad f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x, y) \mapsto \sin x \cos y$
$f_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_4: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x, y) \mapsto \arctan x + y$

l) Berechnen Sie die vollständige Taylor-Reihe von f_1 um den Punkt $(0, 0, 0)$!

m) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1, 0, 0)$!

n) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

o) *Richtig oder falsch:* Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Falls für $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ überall $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ ist, kann $f(x, y) = 0$ überall eindeutig nach y aufgelöst werden.

p) *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ist genau dann in einer Umgebung von $(a_0, \dots a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eindeutig nach x auflösbar, wenn x eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ ist.

q) Bestimmen Sie für $F(x, y) = xy - x \sin y \cdot \cos y - 3x - 5$ alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $F(x, y) = 0$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

r) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung $f(x, y) = 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $f(x)$, für die dort $F\big(x, f(x)\big) = 0$ ist.