

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8. Juni 2005

- a) Zeigen Sie: Eine $n \times n$ -Matrix A mit ganzzahligen Einträgen hat genau dann eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen, wenn $\det A = \pm 1$ ist.

Lösung: Falls A und A^{-1} nur ganzzahlige Einträge haben, sind $\det A$ und $\det A^{-1}$ ganze Zahlen und $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Dies ist nur möglich, falls $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$ ist.

Umgekehrt sei $\det A = \pm 1$ und alle Einträge von A ganzzahlig. Der i -te Spaltenvektor von A ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{e}_i$, wobei \vec{e}_i der i -te Einheitsvektor ist. Nach der CRAMERSchen Regel ist berechnen sich die Komponenten von \vec{x} als Quotienten zweier Determinanten, wobei im Nenner $\det A = \pm 1$ steht und im Zähler die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen, also eine ganze Zahl. Somit sind alle Lösungen ganzzahlig und mithin auch alle Einträge von A^{-1} .

- b) Für die Vektorräume \mathbb{F}_2^n sei eine Bilinearform $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n$ definiert durch die übliche Formel $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$. Welche Vektoren aus \mathbb{F}_2^n haben dann Produkt Null mit sich selbst?

Lösung: $\vec{v} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n v_i$, da jedes der beiden Elemente von \mathbb{F}_2 sein eigenes Quadrat ist. Lösungen sind also die Vektoren mit einer geraden Anzahl von Einsen unter ihren Komponenten.

- c) \mathbb{C}^2 sei mit seinem Standard HERMITESchen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}!$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} = -i + i = 0 \\ \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= i \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{1} = 2i \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} &= \overline{\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = -2i \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = \bar{i} + \bar{i} = -2i \end{aligned}$$

- d) *Richtig oder falsch:* \mathbb{R}^2 mit dem Produkt $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1$ ist ein EUKLIDischer Vektorraum.

Lösung: *Falsch*, denn das Produkt ist nicht symmetrisch.

- e) Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v} \odot \vec{w}|$ als Produkt nimmt?

Lösung: Jetzt ist es zwar symmetrisch, aber nicht mehr linear.

f) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 ?

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) + 4v_3w_3 & (1) \\ (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) - 4v_3w_3 & (2) \\ v_1w_2 + v_2w_3 + v_3w_1 & (3) \\ v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3 + v_2(w_1 + w_3) + (v_1 + v_3)w_2 & (4) \end{cases}$$

Lösung: Die Bilinearität ist in allen Fällen trivial, symmetrisch sind (1), (2) und (4). Positive Semidefinitheit ist klar bei (1), aber das Produkt ist nicht definit, da z.B.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ist. (2) ist nicht einmal positiv semidefinit, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 + 2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7.$$

Was (4) betrifft, so ist

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1^2 + 2v_2^2 + 3v_3^2 + 2v_2(v_1 + v_3).$$

Quadratische Ergänzung macht daraus

$$(v_1 + v_2)^2 + (v_2 + v_3)^2 + 2v_3^2,$$

was nie negativ sein kann. Der Ausdruck verschwindet genau dann, wenn alle drei Quadrate verschwinden, d.h.

$$v_1 = -v_2, \quad v_2 = -v_3 \quad \text{und} \quad v_3 = 0.$$

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn alle Komponenten v_i verschwinden. Damit definiert (4) und nur (4) ein Skalarprodukt.

g) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-FORM $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$ macht \mathbb{R}^4 zum EUKLIDischen Vektorraum.

Lösung: *Falsch*, denn sie ist offensichtlich nicht positiv definit. (Aber trotzdem nützlich!)

h) *Richtig oder falsch:* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = a\bar{c} + \bar{b}d$ definiert ein HERMITESches Skalarprodukt auf \mathbb{C}^2 .

Lösung: *Falsch*, es ist nicht linear im ersten Argument: $\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -i \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = i - 1$, aber $i \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = i(1 - i) = i + 1$.

i) Drücken Sie für ein HERMITESches Skalarprodukt das Produkt $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w})$ aus durch $\vec{v} \cdot \vec{w}$!

Lösung: $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w}) = i(\vec{v} \cdot (i\vec{w})) = i\bar{i}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

j) Gibt es ein HERMITESches Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n , das nur reelle Werte annimmt?

Lösung: Natürlich nicht; wegen der Linearität im ersten Argument kann jedes HERMITESche Skalarprodukt jede komplexe Zahl als Wert annehmen.

k) Zeigen Sie: Für zwei beliebige Vektoren \vec{v}, \vec{w} eines EUKLIDISCHEN Vektorraums V gilt:
 $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$. (Hinweis: Quadrieren Sie beide Seiten!)

Lösung: Da Längen von Vektoren nicht negativ sind, ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zur entsprechenden Ungleichung mit beiden Seiten quadriert, also zur Ungleichung $|\vec{v} + \vec{w}|^2 \leq (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2$. Da

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{v}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2$$

und

$$(|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2 = |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| + |\vec{w}|^2,$$

ist diese aber äquivalent zu CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung.

l) Gilt diese Formel auch für HERMITESCHE Vektorräume?

Lösung: Ja, denn zwar ist nun $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} + |\vec{w}|^2$, aber nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung können wir jedes der beiden Produkte $\vec{v} \cdot \vec{w}$ und $\vec{w} \cdot \vec{v}$ durch $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ abschätzen.

m) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x + 2y + 5z = 0$ des \mathbb{R}^3 mit seinem Standardskalarprodukt.

Lösung: Zunächst brauchen wir irgendeine Basis dieses Untervektorraums. Als Kern einer surjektiven linearen Abbildung von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R} ist er zweidimensional, und offensichtlich sind die beiden Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei linear unabhängige Elemente daraus.

Zur Konstruktion einer Orthogonalbasis nach GRAM-SCHMIDT setzen wir $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ und machen für \vec{c}_2 einen Ansatz der Form $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda \vec{c}_1$.

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0 \iff \lambda = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1},$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \quad \text{und} \quad \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^2 + 1^2 = 5.$$

Somit ist $\lambda = -2$ und

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, und \vec{c}_1 hat, wie wir bereits nachgerechnet haben, Länge $\sqrt{5}$. Daher bilden

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine der gesuchten Orthonormalbasen.

n) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 , die den Vektor $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält!

Lösung: Wir ergänzen zu irgendeiner Basis des \mathbb{R}^3 und wenden darauf das GRAM-SCHMIDTSCHE Orthogonalisierungsverfahren an. Zur Rechenersparnis empfiehlt es sich, die neuen Basisvektoren gleich so zu wählen, daß sie auf dem gegebenen Vektor \vec{b}_1 senkrecht stehen, also im Untervektorraum $2x + y + 2z = 0$ liegen, z.B.

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind \vec{b}_1 und \vec{b}_2 bereits orthogonal zueinander, wir müssen also nur noch einen dritten Vektor $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2$ finden, der auf \vec{b}_1 und \vec{b}_2 senkrecht steht, wobei wir bereits wissen, daß \vec{b}_3 auf \vec{b}_1 senkrecht steht:

$$\begin{aligned} \vec{c}_3 \cdot \vec{b}_1 &= \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \lambda \implies \lambda = 0 \\ \vec{c}_3 \cdot \vec{b}_2 &= \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2, \\ \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \implies \mu = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Also ist $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \frac{1}{5}\vec{b}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $\vec{c}_3 \cdot \vec{c}_3 = \frac{16+4+25}{25} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$.

Damit kennen wir auch alle Längen, und können nun leicht eine Orthonormalbasis hinschreiben: $\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$.

o) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von \mathbb{C}^3 mit seinem üblichen HERMITESCHEN Skalarprodukt!

Lösung: Um zunächst eine Orthogonalbasis zu bekommen, ersetzen wir \vec{b}_2 durch eine Linearkombination $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda\vec{b}_1$, die auf \vec{b}_1 senkrecht steht. Also ist

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = 0 \implies \lambda = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}.$$

Hier ist

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = (2+3i) \cdot 2 + (4+3i) \cdot (-3i) + (6+i) \cdot 6 = 49$$

und

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49.$$

Somit ist $\lambda = -1$ und

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = 3^2 + 4^2 + 1^2 = 26.$$

Damit bilden die beiden Vektoren

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ i \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des von \vec{b}_1 und \vec{b}_2 erzeugten Untervektorraums.

p) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von 1 und e^x aufgespannten Untervektorraums von $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$!

Lösung: Wegen $(1, 1) = \int_0^1 1^2 dx = 1$ hat 1 bereits die Länge eins, während

$$(e^x, e^x) = \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{2}$$

ist. Wegen $(1, e^x) = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ folgt

$$(e^x + \lambda, 1) = (e^x, 1) + (\lambda, 1) = e - 1 + \lambda = 0 \iff \lambda = 1 - e,$$

d.h. der „Vektor“ $e^x + 1 - e$ steht senkrecht auf 1. Seine Länge ist

$$\begin{aligned} (e^x + 1 - e, e^x + 1 - e) &= (e^x, e^x) + (1 - e, 1 - e) + 2(e^x, 1 - e) = \frac{e^2 - 1}{2} + (1 - e)^2 + 2(1 - e) \cdot (e - 1) \\ &= \frac{e^2 - 1}{2} - (e - 1)^2 = \frac{e^2 - 1 - 2e^2 + 4e - 2}{2} = \frac{4e - e^2 - 3}{2} \approx 0,242; \end{aligned}$$

als Orthonormalbasis können wir also die Eins nehmen zusammen mit

$$\frac{e^x + 1 - e}{\sqrt{\frac{4e - e^2 - 3}{2}}} = \frac{\sqrt{2} (e^x + 1 - e)}{\sqrt{4e - e^2 - 3}}.$$