

### Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8. Juni 2005

a) Zeigen Sie: Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit ganzzahligen Einträgen hat genau dann eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen, wenn  $\det A = \pm 1$  ist.

b) Für die Vektorräume  $\mathbb{F}_2^n$  sei eine Bilinearform  $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n$  definiert durch die übliche Formel  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ . Welche Vektoren aus  $\mathbb{F}_2^n$  haben dann Produkt Null mit sich selbst?

c)  $\mathbb{C}^2$  sei mit seinem Standard HERMITESchen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}!$$

d) *Richtig oder falsch:*  $\mathbb{R}^2$  mit dem Produkt  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1$  ist ein EUKLIDischer Vektorraum.

e) Was ändert sich, wenn man stattdessen  $|\vec{v} \odot \vec{w}|$  als Produkt nimmt?

f) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$  ?

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) + 4v_3 w_3 & (1) \\ (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) - 4v_3 w_3 & (2) \\ v_1 w_2 + v_2 w_3 + v_3 w_1 & (3) \\ v_1 w_1 + 2v_2 w_2 + 3v_3 w_3 + v_2(w_1 + w_3) + (v_1 + v_3)w_2 & (4) \end{cases}$$

g) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-Form  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2$  macht  $\mathbb{R}^4$  zum EUKLIDischen Vektorraum.

h) *Richtig oder falsch:*  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = a\bar{c} + \bar{b}d$  definiert ein HERMITESches Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^2$ .

i) Drücken Sie für ein HERMITESches Skalarprodukt das Produkt  $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w})$  aus durch  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ !

j) Gibt es ein HERMITESches Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$ , das nur reelle Werte annimmt?

k) Zeigen Sie: Für zwei beliebige Vektoren  $\vec{v}, \vec{w}$  eines EUKLIDischen Vektorraums  $V$  gilt:  $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$ . (*Hinweis:* Quadrieren Sie beide Seiten!)

l) Gilt diese Formel auch für HERMITESche Vektorräume?

m) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums  $x + 2y + 5z = 0$  des  $\mathbb{R}^3$  mit seinem Standardskalarprodukt.

n) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$ , die den Vektor  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  enthält!

o) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 4 + 3i \\ 6 + i \end{pmatrix}$  aufgespannten Untervektorraums von  $\mathbb{C}^3$  mit seinem üblichen HERMITESchen Skalarprodukt!

p) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von 1 und  $e^x$  aufgespannten Untervektorraums von  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit dem Skalarprodukt  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ !