Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25. Mai 2005

a) M sei die $n \times m$-Matrix, deren sämtliche Einträge gleich Eins sind; $D \in k^{n\times n}, D' \in k^{m\times m}$ seien Diagonalmatrizen mit Einträgen $d_1, \ldots, d_n$ *bzw.* $e_1, \ldots, e_m$. Was ist DMD' ?

Lösung: Multipliziert man von links mit einer Diagonalmatrix, werden die Zeilen mit den Diagonaleinträgen multipliziert; die Matrix DM hat also in ihrer i-ten Zeile lauter Einträge d_i. Multipliziert man von rechts mit einer Diagonalmatrix, werden die *Spalten* mit den Diagonaleinträgen multipliziert; angewandt auf DM heißt das, daß der (i,j)-Eintrag von DMD' gleich $d_i e_j$ ist.

b) Welchen Rang hat DMD' ?

Lösung: Höchstens eins, denn offensichtlich hat M den Rang eins, und die Multiplikation mit einer weiteren Matrix kann den Rang nicht vergrößern. Falls D oder D' die Nullmatrix sind, so auch DMD'; in diesem Fall ist der Rang also gleich null. Ansonsten hat DMD' mindestens einen von Null verschiedenen Eintrag und damit Rang eins.

c) *Richtig oder falsch:* $E_{ij}E_{j\ell} = E_{i\ell}$ für $E_{ij}, E_{j\ell} \in k^{n\times n}$.

Lösung: *Richtig:* E_{ij} ist die Abbildungsmatrix jener linearer Abbildung, die den Basisvektor $\vec{e}_j$ auf $\vec{e}_i$ abbildet und alle anderen auf den Nullvektor; entsprechend $E_{j\ell}$. Das Produkt gehört also zu jener linearen Abbildung, die $\vec{e}_\ell$ via $\vec{e}_j$ auf $\vec{e}_i$ abbildet und alle anderen Basisvektoren auf den Nullvektor, d.h. $E_{j\ell}E_{ij} = E_{i\ell}$.

d) Was ist $E_{j\ell}E_{ij}$?

Lösung: Für $i \neq \ell$ ist das die Nullmatrix, für $i = \ell$ nach der vorigen Aufgabe gleich E_{jj}, d.h. die Diagonalmatrix mit Eintrag Eins an der j-ten Stelle und sonst lauter Nullen.

e) Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$. Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren, dargestellt als Linearkombinationen der Basisvektoren. Hier ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Der erste Basisvektor wird also einfach mit vier multipliziert und der zweite mit fünf. Die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis ist daher die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix M der linearen Abbildung φ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ wird der eine Vektor der neuen Basis auf sich selbst abgebildet, der andere auf sein Negatives. Damit ist $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

g) Benutzen dies, um die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{99}$ zu berechnen!

Lösung: Die zu potenzierende Matrix A ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung φ aus der vorigen Aufgabe bezüglich der Standardbasis; A^{99} ist also, ebenfalls bezüglich der Standardbasis, die Abbildungsmatrix der 99-maligen Hintereinanderausführung von φ.
Bezüglich der Basis Basis aus der vorigen Aufgabe hat φ die Diagonalmatrix M als Abbildungsmatrix. Für diese ist $M^e = M$ für ungerades e und $M^e = E$ für gerades e. Damit ist auch die e-fache Hintereinanderausführung von φ für ungerades e gleich φ und für gerades e gleich der Identität. Da 99 ungerade ist, ist die 99-fache Hintereinanderausführung von φ wieder φ selbst, hat also bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix A. Somit ist $A^{99} = A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
(Alternativ: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ läßt sich schreiben als $A = B^{-1}MB$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$A^{99} = \underbrace{B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB \cdot \cdots \cdot B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB}_{99 \text{ Faktoren}} = B^{-1}M^{99}B = B^{-1}MB = A\,,$$

denn die Zwischenfaktoren $B \cdot B^{-1} = E$ fallen heraus und $M^{99} = M$. Wie die Matrix B und ihr Inverses konkret aussehen, ist in diesem einfachen Fall irrelevant; bei weniger trivialen Problemen muß man sie natürlich berechnen und auch $B^{-1}M^{99}B$ wirklich ausrechnen. Hier ist übrigens zufälligerweise $B^{-1} = -B$.)

h) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter A:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Für die erste Spalte addieren wir die erste Zeile zweimal zur zweiten und subtrahieren sie von der dritten:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Entsprechend behandeln wir die zweite Spalte: Wir addieren zweimal die zweite Zeile zur dritten und subtrahieren sie von der vierten:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Schließlich addieren wir noch zweimal die dritte Zeile zur vierten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier steht links eine obere und rechts eine untere Dreiecksmatrix, also ist $ZA = R$ mit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus $ZA = R$ folgt $A = LR = Z^{-1}R$; wir müssen also noch Z invertieren. Der GAUSS-Algorithmus führt auf

$$L = Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie zur Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ Dreiecksmatrizen Z, R mit $ZA = R$!

Lösung: Gleiches Verfahren: Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter die gegebene Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Hauptnenner der Zeilen teilweise schon recht groß sind, ist es wahrscheinlich am besten, sich an die Regeln der Bruchrechnung zu erinnern und sie stur anzuwenden: Wir subtrahieren zunächst zwei Drittel der ersten Zeile von der zweiten und die halbe erste Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann muß noch sechs Fünftel der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert werden:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} & \frac{3}{10} & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Damit sind wir fertig und haben das Ergebnis

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

j) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe der Matrizen Z und R!

Lösung: Aus $ZA = R$ folgt $A = Z^{-1}R$ oder $A^{-1} = R^{-1}Z$. Hier ist

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -24 & 180 \\ 0 & 36 & -720 \\ 0 & 0 & 600 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = R^{-1}L = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix}.$$

k) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=a,\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=b\quad\text{und}\quad \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=c$$

in Abhängigkeit von $a,b,c\in\mathbb{R}$!

Lösung: Nachdem wir A^{-1} schon kennen, können wir einfach sagen, daß $A\vec{x}=\vec{b}$ die Lösung $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ hat, d.h.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72&-240&180\\-240&900&-720\\180&-720&600\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72a-240b+180c\\-240a+900b-720c\\180a-720b+600c\end{pmatrix}.$$

(An den großen Koeffizienten hier sieht man übrigens auch, warum Gleichungssysteme dieser Art so empfindlich auf Störungen der rechten Seite und damit auch auf Rundungsfehler reagieren; entsprechende Matrizen der Größen 6×6 und 15×15 kennen wir bereits aus der Vorlesung als Beispiele für Schwierigkeiten beim numerischen Lösen linearer Gleichungssysteme.)

l) Überlegen Sie sich, daß die komplexen Zahlen $1+i$ und $1-i$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ bilden, und konstruieren Sie Matrizen $A,B\in\mathbb{R}^{2\times2}$, so daß gilt

$$a+ib=\lambda(1+i)+\mu(1-i)\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad B\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}!$$

Lösung: Da die Vektoren der zweiten Basis schon durch die erste ausgedrückt sind, sehen wir sofort, daß (hier nicht nur symbolisch, sondern als echte Matrixgleichung über $\mathbb{C}$)

$$\begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\quad\text{ist; mit}\quad M=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

ist somit $A={}^tM^{-1}$ und $B=A^{-1}={}^tM$. Damit ist

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad A=B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12\end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man B auch direkt berechnen durch Ausmultiplizieren:

$$\lambda(1+i)+\mu(1-i)=(\lambda+\mu)1+(\lambda-\mu)i\,.$$

Daraus läßt die die Matrix B direkt ablesen, und A ist natürlich invers dazu.

m) Zeigen Sie, daß die Tschebyscheff-Polynome $T_0=1$, $T_1=x$, $T_2=2x^2-1$ und $T_3=4x^3-3x$ eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen A,B für die gilt: Ist

$$\begin{aligned}&a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\\&=b_3T_3+b_2T_2+b_1T_1+b_0T_0\end{aligned},\ \text{so ist}\quad A\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_0\\\vdots\\b_3\end{pmatrix}\ \text{und}\ B\begin{pmatrix}b_0\\\vdots\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_3\end{pmatrix}!$$

Lösung: Da die Tschebyscheff-Polynome verschiedene Grade haben, müssen sie linear unabhängig sein; da auch die Anzahl stimmt, bilden sie also eine Basis.

Die Matrix der Koeffizienten, mit denen sie als Linearkombination der x-Potenzen dargestellt sind, ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{denn} \quad \begin{aligned} T_0 &= 1 \cdot 1 \\ T_1 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \\ T_2 &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 \\ T_3 &= 0 \cdot 1 - 3 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 \end{aligned} .$$

Damit ist

$$B = {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Alternativ: Ausmultiplizieren zeigt, daß

$$\begin{aligned} b_3T_3 + b_2T_2 + b_1T_1 + b_0T_0 &= b_3(4x^3 - 3x) + b_2(2x^2 - 1) + b_1x + b_0 \\ &= 4b_3x^3 + 2b_2x^2 + (-3b_3 + b_1)x + (-b_2 + b_0) \end{aligned}$$

ist, d.h.

$$a_0 = b_0 - b_2, \quad a_1 = b_1 - 3b_3, \quad a_2 = 2b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = 4b_3 ,$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

Damit ist B bekannt, und $A = B^{-1}$ wird wie bei der ersten Alternative nach GAUSS berechnet.