

### Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25. Mai 2005

- a)  $M$  sei die  $n \times m$ -Matrix, deren sämtliche Einträge gleich Eins sind;  $D \in k^{n \times n}$ ,  $D' \in k^{m \times m}$  seien Diagonalmatrizen mit Einträgen  $d_1, \dots, d_n$  bzw.  $e_1, \dots, e_m$ . Was ist  $DMD'$ ?
- b) Welchen Rang hat  $DMD'$ ?
- c) *Richtig oder falsch*:  $E_{ij}E_{j\ell} = E_{i\ell}$  für  $E_{ij}, E_{j\ell} \in k^{n \times n}$ .
- d) Was ist  $E_{j\ell}E_{ij}$ ?
- e) Die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  habe bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^2$  die Abbildungsmatrix  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$ . Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ?
- f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $M$  der linearen Abbildung  $\varphi$  mit  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$  bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ !
- g) Benutzen dies, um die Matrix  $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{99}$  zu berechnen!
- h) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ !
- i) Bestimmen Sie zur Matrix  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$  Dreiecksmatrizen  $Z, R$  mit  $ZA = R$ !
- j) Berechnen Sie  $A^{-1}$  mit Hilfe der Matrizen  $Z$  und  $R$ !
- k) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
- $$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = a, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = b \quad \text{und} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = c$$

in Abhängigkeit von  $a, b, c \in \mathbb{R}$ !

- l) Überlegen Sie sich, daß die komplexen Zahlen  $1+i$  und  $1-i$  eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$  bilden, und konstruieren Sie Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , so daß gilt

$$a + ib = \lambda(1+i) + \mu(1-i) \iff A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}!$$

- m) Zeigen Sie, daß die TSCHEBYSCHEFF-Polynome  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x$ ,  $T_2 = 2x^2 - 1$  und  $T_3 = 4x^3 - 3x$  eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen  $A, B$  für die gilt: Ist

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_3T_3 + b_2T_2 + b_1T_1 + b_0T_0, \quad \text{so ist} \quad A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}!$$