

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. Mai 2005

- a) Lösen Sie für $a \in \{0, 1\}$ das lineare Gleichungssystem $x + y = 1$, $y + z = 0$ und $x + z = a$ sowohl über \mathbb{F}_2 als auch über \mathbb{R} !
- b) Bestimmen Sie alle Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems

$$x - y - z + u = 0, \quad x + y - z = 0, \quad 3x + 2y - z - u = 0 \quad \text{und} \quad 2x + 3y - 2u = 0!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

- c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $2x - y + az = a$, $2ax + y - 2z = 0$ und $2x + ay - 2z = 0$!
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?
- d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathcal{L}_a des linearen Gleichungssystems

$$(a + 1)x + 2y + 3az = 6a \quad (1)$$

$$(2a + 2)x - y - 4az = -3a \quad (2)$$

$$(3a + 3)x + 2y + 2az = 9a \quad (3)$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! (aus der Modulklausur vom April 2004)

- e) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge \mathcal{L}_a des linearen Gleichungssystems (aus der Scheinklausur 2002)

$$aw + x + 2y + z = a + 2 \quad (1)$$

$$-aw + x - 4y + z = a - 2 \quad (2)$$

$$-aw + 2x + (2a - 1)y + 5z = 2a + 4 \quad (3)$$

$$-3aw - 5x + 2ay + az = 4 - 3a \quad (4)$$

- f) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n \times m}$ den Rang n , so gibt es eine Matrix $B \in k^{m \times n}$ mit $AB = E$.
- g) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n \times m}$ den Rang n , so gibt es eine Matrix $B \in k^{m \times n}$ mit $BA = E$.

- h) Bestimmen Sie alle Matrizen X , für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}!$

- i) Berechnen Sie die inversen Matrizen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}!$

- j) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

- k) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1} !

- l) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

- m) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

- n) *Zeigen Sie:* Falls für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n \times n}$ gilt $AB + BA = 0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.