WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515



## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. April 2005

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ sei eine Teilmenge von $V$.

*a) Richtig oder falsch:* Ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)\}$.

**Lösung:** *Falsch;* einfachstes Gegenbeispiel ist die Nullabbildung.

*b) Richtig oder falsch:* Ist $\{\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.

**Lösung:** *Richtig,* denn ist $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$, so ist wegen $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ auch

$$\varphi\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n\right) = \lambda_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec{v}_n) = \vec{0},$$

also müssen wegen der linearen Unabhängigkeit der Bildvektoren alle $\lambda_i$ verschwinden.

*c) Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

**Lösung:** *Richtig,* denn für *reelle* Zahlen $\lambda, \mu$ und $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\overline{\lambda z + \mu w} = \overline{\lambda z} + \overline{\mu w} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} + \overline{\mu} \cdot \overline{w} = \lambda\overline{z} + \mu\overline{w}\,.$$

*d) Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

**Lösung:** *Falsch;* beispielsweise ist für $\lambda = z = i$ zwar $\overline{\lambda z} = \overline{i^2} = -1$, aber $\overline{z} = i \cdot \overline{i} = +1$.

*e)* Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \left\{\sin t, t, t^2\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_4 = \left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$M_5 = \left\{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_6 = \left\{e^t, \sinh t, \cosh t\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

**Lösung:** Im Falle von $M_1$ steigt der Eintrag bei jedem der drei Vektoren von Komponente zu Komponente jeweils um eins an, daher ist

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Das erste Gleichheitszeichen führt zur nichttrivialen Darstellung des Nullvektors

$$2\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \vec{0},$$

die drei Vektoren sind also linear abhängig.

Im Fall von $M_2$ führt die Gleichung

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu+\nu\\2\mu+2\nu\\3\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(rückwärts) auf das lineare Gleichungssystem

$$3\nu = 0, \quad 2\mu + 2\nu = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0,$$

das offensichtlich nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ hat; $M_2$ ist also linear unabhängig. Da der Sinus kein Polynom ist, vermutet man, daß auch $M_3$ linear unabhängig ist, d.h. aus

$$\lambda \sin t + \mu t + \nu t^2 = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

sollte folgen, daß $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist. Einsetzen von $t = \pi$ zeigt, daß für so eine Darstellung $\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ sein müßte, also $\mu = -\pi\nu$. Für $t = -\pi$ dagegen folgt $-\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ also $\mu = \nu\pi$, und das kann nur für $\mu = \nu = 0$ beides gelten. Da der Sinus nicht identisch verschwindet, muß dann auch $\lambda = 0$ sein, die drei Funktionen sind also linear unabhängig.

Falls für Elemente $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda e^t + \mu e^{2t} + \nu e^{3t} \equiv 0$$

ist, hat das kubische Polynom $\lambda X + \mu X^2 + \nu X^3$ unendlich viele Nullstellen, muß also das Nullpolynom sein. Daher ist auch $M_4$ linear unabhängig.

Nach der Fundamentalgleichung der Exponentialgleichung ist $e^{x+1} = ee^x$; daher zeigt bereits die Gleichung

$$e^{x+1} - ee^x \equiv 0$$

die lineare Abhängigkeit von $M_5$.

Die Definitionen $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ zeigen, daß

$$\sinh t + \cosh t = e^t, \quad \text{d.h.} \quad \sinh t + \cosh t - e^t \equiv 0.$$

Somit ist auch $M_6$ linear abhängig.

*f)* *Richtig oder falsch:* Ist $M$ ein Erzeugendensystem von $V$ und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $\varphi(M) = \{\varphi(\vec{v}) \mid \vec{v} \in M\}$ ein Erzeugendensystem von Bild $\varphi$.

**Lösung:** *Richtig,* denn zu jedem Vektor $\vec{w} \in \text{Bild}\,\varphi$ gibt es ein Urbild $\vec{v} \in V$, das sich nach Voraussetzung als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r$$

von Elementen aus $M$ schreiben läßt. Dann ist aber

$$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \varphi\big(\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r\big) = \lambda_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_r \varphi(\vec{b}_r)$$

Linearkombination von Elementen aus $\varphi(M)$.

*g)* Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens $n$?

**Lösung:** Offensichtlich bilden die Polynome $1, X, X^2, \dots, X^n$ eine Basis; die Dimension ist also $n + 1$.

*h)* Welche Dimension hat der Untervektorraum $W = \{a \sin^2 t + b \cos^2 t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

**Lösung:** Wegen der Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist offensichtlich eine der Erzeugenden überflüssig: Beispielsweise läßt sich $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ durch die beiden anderen Erzeugenden ausdrücken, so daß diese bereits zur Erzeugung von $W$ ausreichen:

$$a \sin^2 t + b \cos^2 t + c = (a - b) \sin^2 t + (c - b).$$

1 und $\sin^2 t$ bilden eine Basis, denn wären sie linear abhängig, müßte $\sin^2 t$ konstant sein. Somit ist $\dim W = 2$. (1 und $\cos^2 t$ bilden aus ähnlichen Gründen ebenfalls eine Basis, ebenso $\sin^2 t$ und $\cos^2 t$.)

*i)* Ergänzen Sie die Menge $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$!

**Lösung:** Da je zwei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ eine Basis bilden, genügt es, irgendeinen von $\binom{1}{1}$ linear unabhängigen Vektor dazuzunehmen, z.B. $\binom{1}{0}$ oder $\binom{1}{-1}$.

*j) Richtig oder falsch:* Sind $U_1, U_2$ Untervektorräume eines Vektorraums $V$, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von $U_1$ und $\mathcal{B}_2$ von $U_2$, so daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

**Lösung:** *Richtig:* Man wähle eine Basis $\mathcal{B}_0$ von $U_1 \cap U_2$ und ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B}_1$ von $U_1$ und zu einer Basis $\mathcal{B}_2$ von $U_2$. Der Durchschnitt $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ kann nicht größer sein als $\mathcal{B}_0$, denn er liegt in $U_1 \cap U_2$, wo jeder Vektor linear abhängig ist von den Vektoren aus $\mathcal{B}_0$.

*k) Richtig oder falsch:* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

**Lösung:** Da $\mathcal{B}$ aus drei Vektoren besteht, ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind. Ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 5\mu \\ 7\mu + 11\nu \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

der Nullvektor, so zeigt der dritte Eintrag, daß $\lambda = 0$ sein muß. Dann aber muß wegen der ersten Zeile auch $\mu$ verschwinden, und dann wiederum zeigt die zweite Zeile, daß auch $\nu = 0$ ist. Also sind die Vektoren linear unabhängig und bilden somit eine Basis.
(Alternativ hätte man auch zeigen können, daß $[\mathcal{B}] = \mathbb{R}^3$ ist, was fast genauso geht.)

*l) Richtig oder falsch:* Die Polynome $x^2, x^2 + x$ und $x^2 + x + 1$ bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

**Lösung:** Der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei ist nach *a)* dreidimensional; daher reicht es wieder, entweder zu zeigen, daß die drei Polynome linear unabhängig sind, oder aber zu zeigen, daß sie ein Erzeugendensystem des Vektorraums bilden. Da ich bei der vorigen Frage über die lineare Unabhängigkeit argumentiert habe, zeige ich hier – auch wenn es geringfügig aufwendiger ist – letzteres.
Sei also $ax^2 + bx + c$ ein Polynom vom Grad höchstens zwei. Gesucht sind reelle Zahlen $\lambda, \mu, \nu$, so daß

$$\lambda x^2 + \mu(x^2 + x) + \nu(x^2 + x + 1) = (\lambda + \mu + \nu)x^2 + (\mu + \nu)x + \nu = ax^2 + bx + c$$

ist. Koeffizientenvergleich zeigt, daß dies gilt für

$$\nu = c, \quad \mu = b - c \quad \text{und} \quad \lambda = a - (b - c) - c = a - b\,.$$

Kürzer geht es, wenn man beachtet, daß die Elemente der „üblichen“ Basis $(1, x, x^2)$ als Linearkombinationen der drei hier angegebenen ausgedrückt werden können:

$$1 = (x^2 + x + 1) - (x^2 + x), \quad x = (x^2 + x) - x^2, \quad x^2 = x^2\,.$$

Damit enthält das Erzeugnis der drei Polynome das Erzeugnis von $\{1, x, x^2\}$, also den gesamten Vektorraum.

*m)* Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, die den Vektor mit Komponenten $x, y, z, w$ auf $\begin{pmatrix} x + y - z \\ y + z - w \end{pmatrix}$ abbildet?

**Lösung:** Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv, denn

$$\varphi\left( \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}.$$

Also ist das Bild zweidimensional. Nach der Dimensionsformel ist

$$2 = \dim \text{Bild}\,\varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Kern}\,\varphi = 4 - \dim \text{Kern}\,\varphi\,;$$

somit ist auch der Kern zweidimensional.

Wir hätten das auch direkt nachrechnen können: Für einen Vektor aus dem Kern ist

$$x + y - z = 0 \quad \text{und} \quad y + z - w = 0, \quad \text{also} \quad z = x + y \quad \text{und} \quad w = y + z = x + 2y\,,$$

so daß der Kern genau aus den Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

besteht. Damit haben wir eine Basis des Kerns gefunden und sehen insbesondere, daß er zweidimensional ist.

*n)* Berechnen Sie die folgenden Summen in $\mathbb{F}_2^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$$

**Lösung:** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+1+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

denn in $\mathbb{F}_2$ ist $1 + 1 + 1 = 1$. Schließlich ist $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{u}) = \vec{v}$, denn in $\mathbb{F}_2^n$ ist die Summe eines Vektors mit sich selbst stets der Nullvektor.

*o)* Finden Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^3$ mit $\vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$!

**Lösung:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn in $\mathbb{F}_2$ ist $1 + 1 = 0$.

*p)* Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^2$, die den Vektor mit Komponenten $a, b, c, d$ auf $\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ abbildet!

**Lösung:** Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv, denn setzt man $b = d = 0$, so erhält man den Vektor $\binom{a}{c}$, d.h. man kann für einen beliebigen Vektor aus $\mathbb{F}_2^2$ (mindestens) ein Urbild finden.

Für einen Vektor aus dem Kern muß $a + b = 0$ und $c + d = 0$ sein; für Elemente von $\mathbb{F}_2$ ist dies äquivalent dazu, daß $a = b$ und $c = d$ ist. Der Kern besteht also aus allen Vektoren aus $\mathbb{F}_2^4$, für die sowohl die ersten beiden als auch die letzten beiden Komponenten übereinstimmen.

*q)* *Richtig oder falsch:* Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ sind linear unabhängig.

**Lösung:** *Falsch,* denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \vec{0}.$

*(Wären die drei Vektoren als Elemente von $\mathbb{R}^3$ definiert, wären sie linear unabhängig.)*