Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. April 2005

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

a) Richtig oder falsch: Ist $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$.

b) Richtig oder falsch: Ist $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$.

c) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

d) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

e) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \{\sin t, t, t^2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_4 = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$M_5 = \{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_6 = \{e^t, \sinh t, \cosh t\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

f) Richtig oder falsch: Ist M ein Erzeugendensystem von V und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $\varphi(M) = \{\varphi(\vec v) \mid \vec v \in M\}$ ein Erzeugendensystem von Bild φ.

g) Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens n?

h) Welche Dimension hat der Untervektorraum $W = \{a\sin^2 t + b\cos^2 t + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

i) Ergänzen Sie die Menge $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$!

j) Richtig oder falsch: Sind U_1, U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von U_1 und $\mathcal{B}_2$ von U_2, so daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

k) Richtig oder falsch: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

l) Richtig oder falsch: Die Polynome x^2, x^2+x und x^2+x+1 bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

m) Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, die den Vektor mit Komponenten x,y,z,w auf $\begin{pmatrix}x+y-z\\y+z-w\end{pmatrix}$ abbildet?

n) Berechnen Sie die folgenden Summen in $\mathbb{F}_2^3$:

$$\vec u = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec w = \vec u + \vec v + \vec u$$

o) Finden Sie einen Vektor $\vec x \in \mathbb{F}_2^3$ mit $\vec v + \vec x = \vec u$!

p) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^2$, die den Vektor mit Komponenten a,b,c,d auf $\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$ abbildet!

q) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ sind linear unabhängig.