Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. April 2005

a) Welche der folgenden Mengen sind mit der üblichen Addition und Multiplikation Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0\,,\quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\quad k_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\right\},\quad k_4 = \left\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\right\},$$
$$k_5 = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\},\quad k_6 = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\},\quad k_7 = \left\{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

Lösung: k_1 ist kein Körper, da beispielsweise das Element zwei weder ein additives noch ein multiplikatives Inverses hat. k_2 ist schon deshalb keiner, weil die Null und die Eins beide rational sind; in k_3 gibt es keine additiven Inversen. Auch k_4 ist schon deshalb kein Körper, weil diese Menge kein Nullelement enthält.

k_5 ist ein Körper, denn $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ und $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ liegen wieder in k_5, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}\,.$$

Aus demselben Grund ist auch k_6 ein Körper: $(a+b\sqrt{2}) \pm (c+d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}$ und $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ liegen wieder in k_6, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}\,,$$

denn wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann der Nenner dann nicht verschwinden.

k_7 schließlich ist kein Körper, denn beispielsweise liegt $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ nicht in k_7. (Das ist allerdings schon im wesentlichen die einzige Ausnahme:

$k_8 = \left\{a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ ist ein Körper!)

b) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

Lösung: *Falsch:* Das Einselement muß offensichtlich $(1, 1)$ sein, aber $(1, 0)(x, y) = (x, 0)$ ist stets ungleich $(1, 1)$, so daß beispielsweise $(1, 0)$ kein multiplikatives Inverses hat.

c) Bestimmen Sie den Wert des Polynoms $f(x) = x^{10} + x^5 - x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$!

Lösung: Für $x = 0$ erhalten wir $f(0) = 1$, für $x = 1$ ist $f(1) = 1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

d) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}\right\},\ V_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\},\ V_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\},$$
$$V_4 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 0\right\},\ V_5 = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0\right\},\ V_6 = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2\right\}$$

Lösung: V_1 ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, und für zwei reelle Zahlen λ, μ ist

$$\lambda\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u \\ u+v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ \lambda(x+y) + \mu(u+v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ (\lambda x + \mu u) + (\lambda y + \mu v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} \in V_1 ,$$

V_1 ist also Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und damit insbesondere selbst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

V_2 und V_3 sind keine Vektorräume; beispielsweise enthalten beide keinen Nullvektor. (Es gibt auch sonst noch viele Eigenschaften, die nicht erfüllt sind.)

Auch V_4 ist *kein* Vektorraum: Beispielsweise liegen $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ beide in V_4, nicht aber ihre Summe $\binom{1}{1}$.

V_5 ist Teilmenge des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und für $f, g \in V_5$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liegt auch $\lambda f + \mu g$ in V_5, denn $(\lambda f + \mu g)'(2) = \lambda f'(2) + \mu g'(2) = 0 + 0 = 0$. Genauso sieht man, daß V_6 *kein* Vektorraum ist: Für $f, g \in V_6$ ist $(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 2 + 2 = 4$, d.h. $f + g \notin V_6$.

e) Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Mengen und geben Sie an, welche dieser Mengen ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist!

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{F}_2,\ \ x(y+z) = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{F}_2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

Lösung: V_1 ist aus demselben Grund wie bei der vorigen Aufgabe ein Untervektorraum. Als Menge ist

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Bedingung $x(y+z) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $x = 0$ oder $y + z = 0$ ist. In $\mathbb{F}_2$ ist $y + z = 0$ äquivalent zu $y = z$. Daher ist

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und das ist kein Vektorraum, da beispielsweise die Summe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht in V_2 liegt.

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist kein Vektorraum, da beispielsweise die Summe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht in V_3 liegt. Da jedes der beiden Elemente von $\mathbb{F}_2$ gleich seinem Quadrat ist, können wir die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ vereinfachen zu $x + y + z = 0$ oder auch $z = x + y$. Da diese Bedingung bei der Addition und bei der Multiplikation mit einem Skalar erhalten bleibt, ist

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ein Vektorraum.

f) Richtig oder falsch: Ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k-Vektorraum mit Vektoraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.

Lösung: *Richtig:* Alle Vektorraumaxiome können einfach komponentenweise nachgerechnet werden.

g) Richtig oder falsch: Sind $\varphi, \psi\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so sind auch die Abbildungen $\varphi \pm \psi\colon V \to W$ mit $(\varphi \pm \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) \pm \psi(\vec{v})$ linear.

Lösung: *Richtig,* denn für λ, μ aus dem Grundkörper k und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ist

$$\begin{aligned}(\varphi \pm \psi)(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \varphi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \pm \psi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \\ &= \big(\lambda\varphi(\vec{v}) + \mu\varphi(\vec{w})\big) \pm \big(\lambda\psi(\vec{v}) + \mu\psi(\vec{w})\big) \\ &= \big(\lambda\varphi(\vec{v}) \pm \lambda\psi(\vec{v})\big) + \big(\mu\varphi(\vec{w}) \pm \mu\psi(\vec{w})\big) \\ &= \lambda\big(\varphi(\vec{v}) \pm \psi(\vec{v})\big) + \mu\big(\varphi(\vec{w}) \pm \psi(\vec{w})\big) \\ &= \lambda(\varphi \pm \psi)(\vec{v}) + \mu(\varphi \pm \psi)(\vec{w})\,.\end{aligned}$$

h) Welche der folgenden Vorschriften definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? Was sind dann Kern und Bild? $\quad \pi_0\big((x,y,z)\big) = (x,y,0)\,, \quad \pi_1\big((x,y,z)\big) = (x,y,1)\,,$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ y+2z \\ z+2 \end{pmatrix}, \quad \psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix}, \quad \omega\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy+yz+xz \\ xyz \end{pmatrix}$$

Lösung: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zwei Vektoren (x,y,z) und (u,v,w) aus $\mathbb{R}^3$, die hier in der Lösung wie gewohnt als Spaltenvektoren geschrieben werden sollen (auf dem Aufgabenblatt reichte der Platz dazu nicht aus), ist

$$\begin{aligned}\pi_0\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) &= \pi_0\left(\begin{pmatrix} \lambda x+\mu u \\ \lambda y+\mu v \\ \lambda z+\mu w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x+\mu u \\ \lambda y+\mu v \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda\pi_0\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + \mu\pi_0\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

also ist π_0 linear. Der Kern besteht offensichtlich genau aus den Vektoren mit $x = y = 0$, das Bild aus denen mit $z = 0$.
Für π_1 ist

$$\pi_1\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) = \pi_1\left(\begin{pmatrix} \lambda x+\mu u \\ \lambda y+\mu v \\ \lambda z+\mu w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x+\mu u \\ \lambda y+\mu v \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{aber}$$

$$\lambda\pi_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + \mu\pi_1\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x+\mu u \\ \lambda y+\mu v \\ \lambda z+\mu \end{pmatrix},$$

was im allgemeinen (z.B. für $\lambda = \mu = 1$) verschieden ist. Somit ist π_1 nicht linear, was man auch einfacher daran gesehen hätte, daß der Nullvektor nicht auf den Nullvektor abgebildet wird.

Genau aus diesem Grund ist auch φ offensichtlich nicht linear: Das Bild des Nullvektors hat dritte Komponente zwei.

ψ ist linear, denn für $\lambda, \mu \in k$ und $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\psi\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) &= \psi\left(\begin{pmatrix}\lambda x+\mu u\\ \lambda y+\mu v\\ \lambda z+\mu w\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}(\lambda x+\mu u)+2(\lambda y+\mu v)+3(\lambda z+\mu w)\\ 2(\lambda x+\mu u)+3(\lambda y+\mu v)+4(\lambda z+\mu w)\\ 3(\lambda x+\mu u)+4(\lambda y+\mu v)+5(\lambda z+\mu w)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

und das ist dasselbe wie

$$\lambda\psi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)+\mu\psi\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix}x+2y+3z\\2x+3y+4z\\3x+4y+5z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}u+2v+3w\\2u+3v+4w\\3u+4v+5w\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda(x+2y+3z)+\mu(u+2v+3w)\\ \lambda(2x+3y+4z)+\mu(2u+3v+4w)\\ \lambda(3x+4y+5z)+\mu(3u+4v+5w)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\lambda x+\mu u)+2(\lambda y+\mu v)+3(\lambda z+\mu w)\\ 2(\lambda x+\mu u)+3(\lambda y+\mu v)+4(\lambda z+\mu w)\\ 3(\lambda x+\mu u)+4(\lambda y+\mu v)+5(\lambda z+\mu w)\end{pmatrix}.$$

Der Vektor mit Komponenten x, y, z liegt genau dann im Kern, wenn

$$x+2y+3z=0,\quad 2x+3y+4z=0 \quad\text{und}\quad 3x+4y+5z=0$$

ist. Wir werden bald allgemeine Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme kennenlernen; in diesem einfachen Fall führt aber jedes in der Schule behandelte elementare Verfahren leicht zu einer Lösung.

Beispielsweise sieht man sofort, daß die Differenz zwischen zweiter und erster wie auch zwischen dritter und zweiter Gleichung jeweils die Gleichung $x+y+z=0$ ist; subtrahiert man diese von der ersten Gleichung, ergibt sich $y+2z=0$ oder $y=-2z$. Einsetzen in die Gleichung $x+y+z=0$ zeigt dann, daß $x-2z+z=0$ oder $x=z$ sein muß. Für jede Lösung ist also $x=z$ und $y=-2z$; setzt man irgendein Tripel mit $x=z$ und $y=-2z$ in die drei ursprünglichen Gleichungen ein, sieht man, daß dieses auch umgekehrt stets eine Lösung ist. Also ist

$$\operatorname{Kern}\psi = \left\{\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix}\,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\} = \left[\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right].$$

Zur Bestimmung des Bilds kann man ebenfalls ausnutzen, daß die Differenz zwischen dritter und zweiter sowie zweiter und erster Komponente eines Vektors aus dem Bild gleich ist, d.h.

$$\operatorname{Bild}\psi \subseteq \left\{\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\,\middle|\, w-v=v-u\right\} = \left\{\begin{pmatrix}u\\v\\2v-u\end{pmatrix}\,\middle|\, u,v\in\mathbb{R}\right\} = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right].$$

Wenn man beispielsweise nach einem Urbild mit dritter Komponente null sucht, sieht man schnell, daß

$$\psi\left(\begin{pmatrix}2v-3u\\2u-v\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}(2v-3u)+2(2u-v)\\2(2v-3u)+3(2u-v)\\3(2v-3u)+4(2u-v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\\2v-u\end{pmatrix}$$

ist, das Bild ist also sogar *gleich* der rechtsstehenden Menge. (Wir werden bald Verfahren kennenlernen, mit denen man solche Probleme systematischer lösen kann.)

ω ist nicht linear, denn beispielsweise ist

$$\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\omega\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\12\\8\end{pmatrix},$$

aber

$$\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)+\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}.$$

i) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$U_1=\{f\in V \mid f(t)=f(-t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{f\in V \mid f(t)=-f(-t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$,
$U_3=\{f\in V \mid f(t)=f(t^2) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$, $U_4=\{f\in V \mid f(t)=f(t+1) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$

Lösung: Seien $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ und f,g Elemente einer der vier betrachteten Mengen U_i. Da alle U_i zumindest die Nullfunktion enthalten, müssen wir nur prüfen, ob dann auch $\lambda f+\mu g$ in U_i liegt. Nach Definition der Vektorraumstruktion von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist

$$(\lambda f+\mu g)(t)=\lambda f(t)+\mu g(t) \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}.$$

Entsprechend ist für $f,g\in U_1$

$$(\lambda f+\mu g)(-t)=\lambda f(-t)+\mu g(-t)=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t),$$

d.h. U_1 ist Untervektorraum. Genauso auch U_2, denn

$$\begin{aligned}-(\lambda f+\mu g)(-t)&=-\lambda f(-t)-\mu g(-t)=\lambda\cdot\big(-f(-t)\big)+\mu\cdot\big(-g(-t)\big)\\&=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t).\end{aligned}$$

Für U_3 haben wir

$$(\lambda f+\mu g)(t^2)=\lambda f(t^2)+\mu g(t^2)=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t),$$

auch das ist also ein Untervektorraum, genau wie U_4, denn liegen f,g in U_4, ist für alle $t\in\mathbb{R}$

$$(\lambda f+\mu g)(t+1)=\lambda f(t+1)+\mu g(t+1)=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t).$$

j) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon\begin{cases}\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ f\mapsto f'\end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie Kern und Bild!

Lösung: Da die Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion insbesondere stetig ist, definiert φ zunächst einmal überhaupt eine Abbildung von $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nach $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mit der Linearität gibt es keine Probleme, da Differentiation eine lineare Operation ist:

$$(\lambda f+\mu g)'(t)=\lambda f'(t)+\mu g'(t).$$

Im Kern liegen alle mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also genau die konstanten Funktionen. Im Bild liegen die sämtlichen Ableitungen von mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen; diese sind immer noch mindestens einmal stetig differenzierbar, und da die Stammfunktion jeder mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktion mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, sind das auch die sämtlichen Bilder. Also ist $\operatorname{Bild}\varphi=\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

k) Zeigen Sie, daß $W = \{a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi \colon \begin{cases} W \to \mathbb{R}^5 \\ f \mapsto \left((f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f(\pi)\right) \end{cases} !$$

Lösung: Zunächst ist W ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, denn alle Funktionen der Bauart $a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind stetig und jede Linearkombination solcher Funktionen ist wieder von derselben Bauart:

$$\begin{aligned} &\lambda\big(a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t\big) + \mu\big(a' \sin t + b' \sin 2t + c' \sin 4t\big) \\ &= (\lambda a + \mu a') \sin t + (\lambda b + \mu b') \sin 2t + (\lambda c + \mu c') \sin 4t\,. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Linearität von φ empfiehlt sich, φ zunächst explizit auszurechnen:

$$\varphi(a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t) = \begin{pmatrix} a \sin 0 + b \sin 0 + c \sin 0 \\ a \sin \frac{\pi}{4} + b \sin \frac{\pi}{2} + c \sin \pi \\ a \sin \frac{\pi}{2} + b \sin \pi + c \sin 2\pi \\ a \sin \frac{3\pi}{4} + b \sin \frac{3\pi}{2} + c \sin 3\pi \\ a \sin \pi + b \sin 2\pi + c \sin 4\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} + b \\ a \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} - b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn $a\frac{\sqrt{2}}{2} + b$ und $a\frac{\sqrt{2}}{2} - b$ beide verschwinden, verschwindet auch ihre Summe und ihre Differenz, und damit auch a und b. Der Kern von φ besteht daher genau aus den Funktionen der Form $c \sin 4t$ mit $c \in \mathbb{R}$, und

$$\operatorname{Bild} \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} + b \\ a \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} - b \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$