

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. April 2005

a) Welche der folgenden Mengen sind mit der üblichen Addition und Multiplikation Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0, \quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad k_4 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$

$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

b) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

c) Bestimmen Sie den Wert des Polynoms $f(x) = x^{10} + x^5 - x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$!

d) Welche der folgenden Mengen sind \mathbb{R} -Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\}, \quad V_5 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0\}, \quad V_6 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2\}$$

e) Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Mengen und geben Sie an, welche dieser Mengen ein \mathbb{F}_2 -Vektorraum ist!

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{F}_2, \quad x(y+z) = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \quad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{F}_2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

f) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper und V ein k -Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k -Vektorraum mit Vektoraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.

g) *Richtig oder falsch:* Sind $\varphi, \psi: V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen, so sind auch die Abbildungen $\varphi \pm \psi: V \rightarrow W$ mit $(\varphi \pm \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) \pm \psi(\vec{v})$ linear.

h) Welche der folgenden Vorschriften definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$? Was sind dann Kern und Bild?

$$\pi_0((x, y, z)) = (x, y, 0), \quad \pi_1((x, y, z)) = (x, y, 1),$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ y+2z \\ z+2 \end{pmatrix}, \quad \psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix}, \quad \omega\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy+yz+xz \\ xyz \end{pmatrix}$$

i) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$$U_1 = \{f \in V \mid f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}, \quad U_2 = \{f \in V \mid f(t) = -f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\},$$

$$U_3 = \{f \in V \mid f(t) = f(t^2) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}, \quad U_4 = \{f \in V \mid f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

j) Zeigen Sie, daß $\varphi: \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie Kern und Bild!

k) Zeigen Sie, daß $W = \{a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi: \begin{cases} W \rightarrow \mathbb{R}^5 \\ f \mapsto \left(f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f(\pi) \right) \end{cases} !$$