

8. Juli 2005

### 13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.
- 2) *Richtig oder falsch:* Falls ein Vektorfeld  $\vec{V}$  mit antisymmetrischer JACOBI-Matrix über der offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Stammfunktion hat, ist es dort konstant.
- 3) *Richtig oder falsch:* Falls für zwei Vektorfelder  $\vec{V}$  und  $\vec{W}$  auf  $U \subset \mathbb{R}^n$  und eine Kurve  $\gamma$  in  $U$  gilt  $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} \vec{W} \cdot d\vec{x}$ , so ist  $\vec{V}(\mathbf{x}) = \vec{W}(\mathbf{x})$  für alle Kurvenpunkte  $\mathbf{x} = \gamma(t)$ .
- 4) Was ist das (dreidimensionale) Volumen von  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 100, |z| \leq 1\}$ ?
- 5) *Richtig oder falsch:* Das Vektorfeld  $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y/(x^2+y^2) \\ -x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$  hat eine Stammfunktion.
- 6) *Richtig oder falsch:*  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 1\}$  ist einfach zusammenhängend.
- 7) *Richtig oder falsch:* Die Oberfläche einer Kugel ist einfach zusammenhängend.
- 8) *Richtig oder falsch:* Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

- a) Ein Massenpunkt läuft im ebenen Kraftfeld  $\vec{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  auf einem der beiden Bogen des Einheitskreises von  $(-1, 0)$  nach  $(0, 1)$ . Berechnen Sie die Arbeit  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\mathbf{x}$  für beide Möglichkeiten!
- b) Integrieren Sie das Vektorfeld  $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$  längs des Dreiecks mit Ecken  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  und  $(0, 0)$ !
- c) Integrieren Sie das Vektorfeld  $\vec{W}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$  längs der beiden Teilbögen des Einheitskreises, die den Punkt  $(1, 0)$  mit  $(0, 1)$  verbinden!
- e) Ist eines der Vektorfelder  $\vec{F}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{W}$  konservativ?

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie für die Kurve  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto (t - \frac{\ell}{2}, 0, 0)$  das Integral  $\int_{\gamma} \frac{ds}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$  für einen festen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ , der nicht auf  $\gamma$  liegt.
- b) Wie verhält sich das Integral, wenn  $\mathbf{x}_0$  gegen einen Punkt auf  $\gamma$  geht?

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Das Kurvenstück  $\gamma$  sei gegeben durch  $\gamma: \begin{cases} [0, 100\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (2 \cos 2t, 2 \sin 2t, 3t) \end{cases}$ .

- a) Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch!
- b) Welche Bogenlänge hat  $\gamma$ ?