WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

1. Juli 2005

12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Wie sieht die Funktion $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ in Kugelkoordinaten aus?

2) Richtig oder falsch: Falls die stetige Funktion $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ keine negativen Werte annimmt, ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$.

3) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2}=\frac{-1}{2}-\frac{-1}{-1}=-\frac{3}{2}$.

4) Richtig oder falsch: Die Funktionen $g(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ und $h(x)=\int_a^x f(\xi+1)\,d\xi$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante.

5) Richtig oder falsch: Für die stetige Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$ für alle $a>0$. Dann ist f eine ungerade Funktion.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y)=xy$ auf der Kreisline $x^2+y^2=1$, indem Sie das Problem in Polarkoordinaten formulieren und dann die entstehende Extremwertaufgabe lösen.

b) In Polarkoordinaten ausgedrückt ist das Potential eines statischen Dipols, eingeschränkt auf eine Ebene, $U(r,\varphi)=\dfrac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Berechnen Sie die Divergenz von $E=-\operatorname{grad}U$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Eine Schablone zum Zeichnen der Parabel $y=x^2$ habe eine Länge (= maximaler y-Wert) von 12 cm. Welche Fläche hat sie?

b) Beweisen Sie die KEPLERsche Faßregel: Für $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ ist die Fläche zwischen der Kurve $y=f(x)$ und der x-Achse zwischen den Koordinatenwerten $x=a$ und $x=b$ gleich $\frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2)$ mit $y_0=f(a)$, $y_1=f(\frac{a+b}{2})$ und $y_2=f(b)$.

c) Gelegentlich wird diese Regel auch für beliebige Funktionen zur näherungsweisen Berechnung des Integrals eingesetzt. Schätzen Sie nach dieser Formel die Fläche unter der Sinuslinie zwischen 0 und π, und vergleichen Sie mit dem korrekten Ergebnis!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Convert $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2(x^2+1)(x-1)}$ to partial fraction form and determine an antiderivative of f!

Keine Abgabe — Am 8. Juli endet die Vorlesungszeit!