Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

3. Juni 2005

8. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ seien zwei Vektoren der Länge zwei; die Länge von $\vec{v}+\vec{w}$ sei drei. Was ist $\vec{v}\cdot\vec{w}$?

2) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^3$ seien zwei Vektoren der Länge zwei; die Länge von $\vec{v}+\vec{w}$ sei drei. Was können Sie über $\vec{v}\cdot\vec{w}$ sagen?

3) Richtig oder falsch: V sei ein Euklidischer Vektorraum und für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ sei $\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w}$ für alle $\vec{w} \in V$. Dann ist $\vec{u} = \vec{v}$.

4) Richtig oder falsch: Die Multiplikation reeller Zahlen macht $\mathbb{R}$ zu einem Euklidischen Vektorraum.

5) Richtig oder falsch: Die Abbildung $(z, w) \mapsto |zw|$ macht $\mathbb{C}$ zu einem Hermiteschen Vektorraum.

6) Richtig oder falsch: $\mathbb{C}$ mit dem Produkt

$$(x+iy)\odot(u+iv) = (xu-4yv) + 2i(xv-yu) \quad \text{für} \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

ist ein Hermitescher Vektorraum.

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*
Let $A = (a_{ij})$ be an invertible $n \times n$-matrix and $B = A^{-1}$ it's inverse matrix. Find an explicit formula for the entry b_{ij} of B with denominator $\det A$ and an $(n-1)\times(n-1)$-determinant as its numerator!

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des durch $x+y+z=0$ definierten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt!

b) Der Vektorraum $\mathbb{C}^5$ sei mit seinem üblichen Hermiteschen Produkt versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2-2i \\ -4i \\ 4+i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -4-i \\ 0 \\ 4+2i \\ 4 \\ 4+i \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraums!

Aufgabe 3: (*4 Punkte)*
V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

a) Zeigen Sie: Durch $(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V!

Abgabe bis zum Freitag, dem 10. Juni 2005, um 12.00 Uhr