Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

22. April 2005

2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.

3) *True or false:* If the vectors $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, and $\vec{b}_4$ form a basis of a vector space V over $\mathbb{R}$, then so do $4\vec{b}_4, 3\vec{b}_3, 2\vec{b}_2$, and $\frac{1}{7}\vec{b}_1$.

4) *Richtig oder falsch:* Jeder Untervektorraum von $\mathbb{Q}^n$ hat eine Basis aus Vektoren mit ganzzahligen Einträgen.

5) Berechnen Sie in $\mathbb{F}_2^{10}$ die Summe der beiden Vektoren $\vec{v} = (0,1,0,1,1,0,1,1,1,0)$ und $\vec{w} = (1,0,1,0,1,0,1,0,1,0)$!

6) Finden Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^{10}$ mit $\vec{v} + \vec{x} = \vec{w}$!

Problem 1: *(5 points)*

a) Show that the vectors $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ and $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ are linearly independent!

b) Find three real numbers $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that $[\vec{u}, \vec{v}] = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\}$ for these two vectors $\vec{u}, \vec{v}$!

c) For an arbitrary vector $\vec{w} = \begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, show that $\vec{u}, \vec{v}$ and $\vec{w}$ generate $\mathbb{R}^3$ if and only if $ap + bq + cr \neq 0$!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Welche Dimension hat der Vektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y + 5z = 0 \right\} \leq \mathbb{R}^3$?

b) Bestimmen Sie eine Basis von U!

c) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = \left[\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t, \cosh^2 t, e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}\right] \leq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,!$$

Dabei ist $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

b) Zeigen Sie: Das Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon U \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\; f \mapsto \dfrac{df}{dt}$ liegt in U.

c) Bestimmen Sie eine Basis das Bilds von φ!

Abgabe bis zum Freitag, dem 29. April 2005, um 12.00 Uhr