WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

15. April 2005

1. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die leere Menge ist ein Vektorraum über sich selbst.

2) Richtig oder falsch: Für $x, y \in \mathbb{F}_2$ gilt die „binomische Formel"

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 = (x+y)(x-y) = x+y\,.$$

3) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum bezüglich der üblichen reellen Addition und der Skalarmultiplikation $0 \cdot x = 0$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4) Richtig oder falsch: Sind $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen, so ist auch die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi\colon \begin{cases} U \to W \\ \vec{u} \mapsto \psi\big(\varphi(\vec{u})\big) \end{cases}$ linear.

5) Richtig oder falsch: Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die der Bedingung $\varphi \circ \varphi = \varphi$ genügt, so ist φ entweder die Nullabbildung oder die Identität.

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Die reellen Polynome vom Grad höchstens vier bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Für welche $a_0 \in \mathbb{R}$ bilden die Polynome vom Grad höchstens vier mit konstantem Koeffizienten a_0 einen Untervektorraum?

c) Ist auch die Menge aller reeller Polynome vom Grad genau vier ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

d) Ist auch die Menge *aller* reeller Polynome ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ x-2y+3z \end{pmatrix} \end{cases}$ ist linear.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ!

Problem 3: (*5 points*)

a) Show that $V = \{a \sin t + b \cos t \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ is a vector space over $\mathbb{R}$!

b) Determine whether $\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ defines a linear map $V \to V$!

c) Compute the kernel and the image of the sampling map

$$\varphi\colon \begin{cases} V \to \mathbb{R}^6 \\ f \mapsto \big(f(0), f(\tfrac{1}{2}\pi), f(\pi), f(\tfrac{3}{2}\pi), f(2\pi), f(\tfrac{5}{2}\pi)\big) \end{cases} !$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 22. April 2005, um 12.00 Uhr