Lösungen der Aufgaben des HM-Teils

WOLFGANG K. SEILER

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = f(t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ bilden einen reellen Vektorraum

Lösung: *Richtig,* denn sind f und g zwei solche Funktionen und λ, μ zwei reelle Zahlen, so ist $(\lambda f + \mu g)(t+1) = \lambda f(t+1) + \mu g(t+1) = \lambda f(t) + \mu g(t) = (\lambda f + \mu g)(t)$.

2) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi: \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) = f(28) + f'(3) + f''(2001)$ ist linear.

Lösung: *Richtig,* denn sowohl das Differenzieren als auch das Einsetzen spezieller Werte sind lineare Operationen.

3) Richtig oder falsch: Wenn $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in Zylinderkoordinaten ausgedrückt nicht von der Winkelvariablen abhängt, sind die Niveaflächen von f Zylinder.

Lösung: *Falsch;* für $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$ sind sie Kugeloberflächen.

4) Was ist $\iiint\limits_{\mathcal{K}} x \, dx \, dy \, dz$ für $\mathcal{K} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\right\}$?

Lösung: Der Integrationsbereich ist eine Kugel mit Radius zehm um den Ursprung, und der Integrand x ist ungerade bezüglich des Ursprungs, zu dem die Kugel symmetrisch liegt. Daher verschwindet das Intergral.

5) Richtig oder falsch: Der Korrelationskoeffizient der Datenpaare $(\sin j/10, \cos j/10)$ mit $j = 1, \ldots, 10$ ist positiv.

Lösung: *Falsch:* Da $j/10$ im Intervall $[0, 1]$ liegt, wo der Sinus steigt, der Cosinus aber fällt, ist der Korrelationskoeffizient negativ.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y - az &= 8 \\ 2x + y + (a+3)z &= 7 \\ x + ay + z &= 4a + 1 \end{aligned}$$

Lösung: Zur Elimination von x subtrahieren wir zunächst die erste Gleichung zweimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{aligned} x + \quad 2y - \quad\quad az &= 8 \\ -3y + (3a+3)z &= -9 \\ (a-2)y + \;\; (a+1)z &= 4a-7 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann durch drei dividiert werden und wird dann zu

$$-y + (a+1)z = -3\,;$$

addiert man das $(a-2)$-fache dieser Gleichung zu dritten, entsteht die Gleichung

$$(a^2-1)z = a-1\,.$$

Für $a = 1$ wird diese Gleichung zu $0z = 0$, stellt also keinerlei Bedingung; in diesem Fall kann z also jeden beliebigen Wert λ annehmen, und die zweite Gleichung zeigt, daß dann

$$y = (a+1)z + 3 = 2\lambda + 3$$

ist. Aus der ersten Gleichung folgt

$$x = 8 - 2y + az = 8 - 4\lambda - 6 + \lambda = 2 - 3\lambda\,.$$

Für $a \neq 1$ können wir die Gleichung für z durch $a-1$ dividieren und erhalten

$$(a+1)z = 1\,.$$

Für $a = -1$ ist diese Gleichung und damit das gesamte Gleichungssystem unlösbar; ansonsten ist

$$z = \frac{1}{a+1}\,.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung führt auf

$$-y + 1 = -3 \quad \text{oder} \quad y = 4\,,$$

und damit wird die erste Gleichung zu

$$x + 8 - \frac{a}{a+1} = 8 \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{a+1}\,.$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \emptyset & \text{für } a = -1 \\ \left\{(2-3\lambda, 2\lambda+3, \lambda) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = 1 \\ \left\{\left(\frac{a}{a+1}, 4, \frac{1}{a+1}\right)\right\} & \text{für } a \neq 1, -1 \end{cases}\,.$$

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)

M sei die Menge aller Funktionen der Form $f(x) \cdot g(x)$, wobei $f(x) = ax + b$ ein lineares Polynom ist und $g(x)$ eine der Funktionen $1, \sin x, \cos x$.

a) Bestimmen Sie eine Basis des von M erzeugten reellen Vektorraums V!

Lösung: z.B. $\mathfrak{B} = \{1, \sin x, \cos x, x, x\sin x, x\cos x\}$: Offensichtlich läßt sich jede Funktion aus V als Linearkombination dieser Funktionenen darstellen. Ist

$$\alpha \cdot 1 + \beta \sin x + \gamma \cos x + \delta x + \varepsilon x \sin x + \varphi x \cos x = 0\,,$$

so folgt zunächst für $x = 0$, daß $\gamma = -\alpha$ sein muß. Für $x = \pi$ folgt

$$\alpha - \gamma + \pi\delta - \pi\varphi = 0\,,$$

für $x = -\pi$

$$\alpha - \gamma - \pi\delta + \pi\varphi = 0\,,$$

also ist

$$\alpha - \gamma = \delta - \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = \gamma \ \text{ und } \ \delta = \varphi\,.$$

Zusammen mit $\gamma = -\alpha$ folgt

$$\alpha = \gamma = 0\,.$$

Für $x = \pi/2$ ergibt sich die Gleichung

$$\beta + \delta\frac{\pi}{2} + \varepsilon\frac{\pi}{2} = 0\,,$$

für $x = -\pi/2$ entsprechend

$$-\beta - \delta\frac{\pi}{2} + \varepsilon\frac{\pi}{2} = 0\,;$$

beides zusammen zeigt, daß $\beta = -\delta\pi/2$ und $\varepsilon = 0$ ist. Von obiger Beziehung zur linearen Abhängigkeit bleibt somit nur noch

$$\beta \sin x + \delta x + \varphi x \cos x = 0 \quad \text{mit} \quad \beta = -\frac{\delta\pi}{2} \ \text{ und } \ \varphi = \delta\,.$$

Falls $\delta \neq 0$ wäre, könnten wir durch δ dividieren mit dem Ergebnis, daß

$$-\frac{\pi}{2}\sin x + x + x\cos x = 0$$

wäre; speziell für $x = \pi/4$ also

$$-\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\,,$$

was offensichtlich nicht der Fall ist. Also ist $\delta = 0$ und damit verschwinden alle Koeffizienten der obigen Beziehung. Die Elemente von $\mathfrak{B}$ sind also linear unabhängig und damit ist $\mathfrak{B}$ eine Basis.

b) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon V \to V;\ f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung definiert und bestimmen Sie deren Kern und Bild!

Lösung: Natürlich ist Differentiation eine lineare Operation; beim Nachweis, daß φ eine lineare Abbildung ist, muß also nur gezeigt werden, daß die Ableitungen der Funktionen aus V wieder in V liegen. Dazu reicht es, dies für die Basisvektoren nachzurechnen, und deren Bilder liegen nach der folgenden Tabelle in der Tat in V:

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{d1}{dx} = 0 & & \dfrac{dx}{dx} = 1 \\[2ex]
\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x & & \dfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x \\[2ex]
\dfrac{d\,x\sin x}{dx} = \sin x + x\cos x & & \dfrac{d\,x\cos x}{dx} = \cos x - x\sin x
\end{array}$$

Da V aus differenzierbaren Funktionen besteht und die Ableitung einer Funktion nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung genau dann verschwindet, wenn die Funktion konstant ist, ist der Kern von φ der eindimensionale Untervektorraum der Konstanten; das Bild hat daher nach der Dimensionsformel die Dimension

$$\dim V - \dim \operatorname{Kern} \varphi = 6 - 1 = 5\,.$$

(Das Bild läßt sich auch leicht explizit bestimmen: Aus den beiden letzen Zeilen der Tabelle folgt, daß

$$\frac{d}{dx}(-\cos x + x\sin x) = x\cos x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}(\sin x - x\cos x) = x\sin x$$

im Bild liegen; die Basisvektoren $1, \sin x, \cos x$ liegen laut Tabelle ebenfalls im Bild, also wird das Bild aufgespannt von den sämtlichen Basisvektoren außer x.)

c) Ist V darstellbar als Summe von Kern und Bild von φ?

Lösung: Nein, denn der Kern ist Teilmenge des Bilds, so daß die Summe der beiden gleich dem Bild und somit nur fünfdimensional ist.

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* angegebenen Basis!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren oder, genauer, deren Koeffizientenvektoren. Nach obiger Tabelle ist die Abbildungsmatrix bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ daher gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \end{pmatrix}\ !$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $\det(A - \lambda E) =$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 18-\lambda & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 8 \\ 0 & 18-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 4-\lambda & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 8 \\ 0 & 18-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} &= (18-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (18-\lambda)\big((4-\lambda)(16-\lambda)-64\big) \\ &= (18-\lambda)(\lambda^2+64-20\lambda-64) = (18-\lambda)(\lambda^2-20\lambda) \end{aligned}$$

und

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 4-\lambda & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = -6(\lambda^2-20\lambda)\,.$$

Insgesamt ist also

$$\det(A-\lambda E) = \big((2-\lambda)(18-\lambda) - 6\cdot 6\big)(\lambda^2-20\lambda) = (\lambda^2-20\lambda)^2 = \lambda^2(\lambda-20)^2\,.$$

A hat somit die beiden Eigenwerte $\lambda = 0$ und $\lambda = 20$.

b) Geben Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts an! (Beachten Sie bitte, daß hier *nicht* verlangt wird, Eigenvektoren und Eigenräume zu bestimmen!)

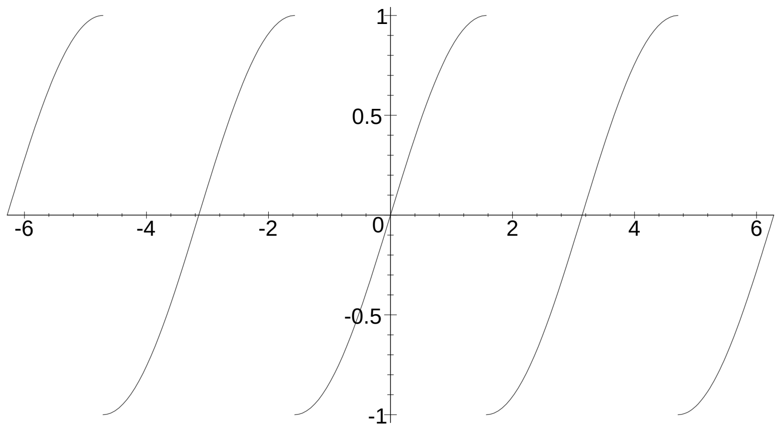
Lösung: Da im charakteristischen Polynom $\lambda^2(\lambda - 20)^2$ beide Linearfaktoren Faktoren quadratisch auftreten, haben beide Eigenwerte die algebraische Vielfachheit zwei. Da die Matrix symmetrisch ist, ist dies gleichzeitig die geometrische Vielfachheit.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode π und sei im Intervall $(-\pi/2, \pi/2]$ gleich $\sin t$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist ungerade im offenen Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$, nicht aber im abgeschlossenen Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$), denn $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = 1$ wegen der Periode π. Damit ist f auch auf $\mathbb{R}$ weder gerade noch ungerade.

f hat allerdings dieselbe FOURIER-Reihe wie die ungerade Funktion g, die an allen ungeradzahligen Vielfachen von $\pi/2$ den Wert Null annimmt und ansonsten mit f übereinstimmt; für die Berechnung der FOURIER-Koeffizienten können wir also so tun, als sei f eine ungerade Funktion.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Da f als ungerade Funktion betrachtet werden kann, treten nur Sinusterme auf. Die Periode ist $T = \pi$, die Kreisfrequenz also $\omega = 2\pi/\pi = 2$. Damit hat die FOURIER-Reihe die Form

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin 2jt\,.$$

Als Periodenintervall nehmen wir natürlich $[-\pi/2, \pi/2]$, wo f abgesehen vom für die Integration irrelevanten Anfangspunkt mit dem Sinus übereinstimmt.

Damit ist

$$b_j = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin 2jt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin 2jt\, dt\,.$$

Der Integrand läßt sich am Einfachsten auf dem Umweg über das Komplexe so vereinfachen, daß wir eine Stammfunktion angeben können:

$$\begin{aligned}\sin t \sin 2jt &= \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot\frac{e^{2jit}-e^{-2jit}}{2i}\\ &= \frac{e^{(2j+1)it}+e^{-(2j+1)it}-e^{(2j-1)it}-e^{-(2j-1)it}}{-4}\\ &= \frac{1}{2}\big(\cos(2j-1)t-\cos(2j+1)t\big)\,,\end{aligned}$$

und dies hat (unter anderem) die Stammfunktion

$$\frac{\sin(2j-1)t}{4j-2}-\frac{\sin(2j+1)t}{4j+2}\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}b_j &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(2j-1)t}{2j-1}-\frac{\sin(2j+1)t}{2j+1}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{2\sin(2j-1)\frac{\pi}{2}}{(2j-1)\pi}-\frac{2\sin(2j+1)\frac{\pi}{2}}{(2j+1)\pi}\,.\end{aligned}$$

Für gerades j ist

$$\sin(2j-1)\frac{\pi}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \quad\text{und}\quad \sin(2j+1)\frac{\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,,$$

für ungerades j ist es umgekehrt. Also ist

$$b_j=\begin{cases}\frac{-2}{(2j-1)\pi}-\frac{2}{(2j+1)\pi}=\frac{-8j}{(4j^2-1)\pi} & \text{für gerades } j\\ \frac{2}{(2j-1)\pi}-\frac{-2}{(2j+1)\pi}=\frac{8j}{(4j^2-1)\pi} & \text{für ungerades } j\end{cases},$$

insgesamt also

$$b_j=\frac{(-1)^{j+1}\cdot 8j}{(4j^2-1)\pi}\,.$$

Die Fourier-Reihe von f ist somit

$$\frac{8}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}\cdot j}{(4j^2-1)}\sin 2jt\,.$$

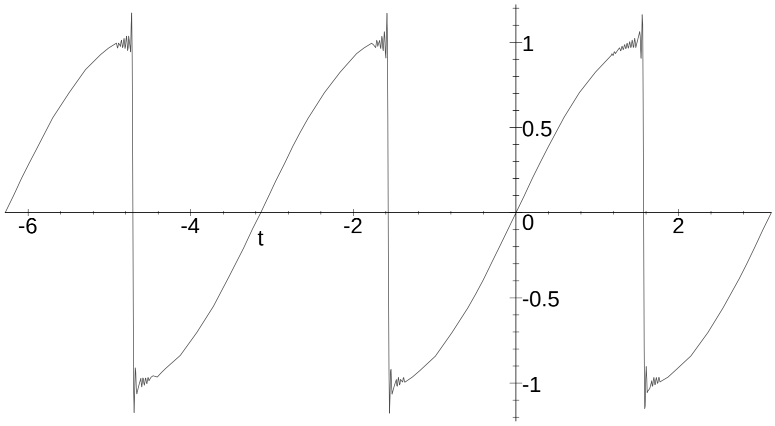
d) Für welche $t\in\mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie für die restlichen Werte von t?

Lösung: f ist stetig für alle $t\in\mathbb{R}$ mit Ausnahme der ungeradzahligen Vielfachen von $\pi/2$; abgesehen von diesen Werte konvergiert die Fourier-Reihe also überall gegen $f(t)$.

Bei den Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert, also von -1 und $+1$; für ungeradzahlige Vielfache von $\pi/2$ konvergiert die Reihe daher gegen Null.

e) Tritt bei der Konvergenz das Gibbs-Phänomen auf, und wenn ja, für welche Werte von t?

Lösung: Das Gibbs-Phänomen tritt an allen Sprungstellen auf, also bei allen ungeradzahligen Vielfachen von $\pi/2$. Die nächste Abbildung zeigt dies für die hundertste Teilsumme der Reihe.

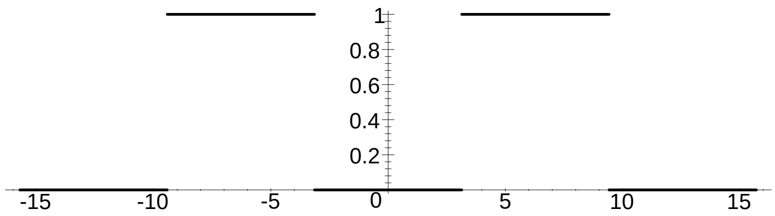


Aufgabe 5: *(3 Punkte)*

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gleich eins für $\pi \le |t| \le 3\pi$ und ansonsten null.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f!

Lösung:



b) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-3\pi}^{-\pi} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{\pi}^{3\pi} e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-3\pi}^{-\pi} \cos\omega t\,dt + \int_{\pi}^{3\pi} \cos\omega t\,dt - i\int_{-3\pi}^{-\pi} \sin\omega t\,dt - i\int_{\pi}^{3\pi} \sin\omega t\,dt \\
&= 2\int_{\pi}^{3\pi} \cos\omega t\,dt = 2\cdot\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big|_{\pi}^{3\pi} = 2\cdot\frac{\sin 3\pi\omega - \sin\pi\omega}{\omega}\,.
\end{aligned}$$

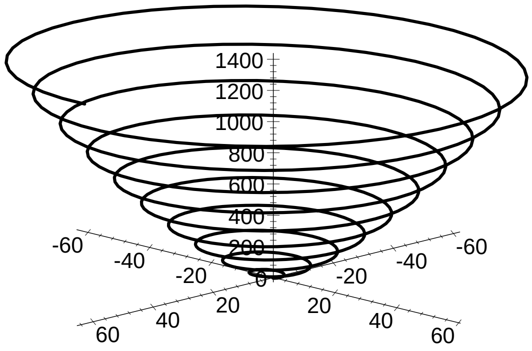
Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Gestalt der Kurve

$$\gamma: [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto \left(t\cos(t), t\sin(t), \frac{\sqrt{8}}{3}t^{3/2}\right)$$

geometrisch!

Lösung: Es handelt sich um eine Spirale mit zehn Windungen, deren Radien immer größer werden; in der Höhe h ist der Radius gleich $(3h/\sqrt{8})^{2/3}$.



b) Berechnen Sie die Bogenlänge von γ !

Lösung: Die Bogenlänge ist

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{20\pi} |\dot{\gamma}(t)| \; dt = \int_0^{20\pi} \left| \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ \sqrt{2t} \end{pmatrix} \right| \; dt \\
&= \int_0^{20\pi} \sqrt{(\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t) + (\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t) + 2t}\, dt \\
&= \int_0^{20\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 2t}\, dt \\
&= \int_0^{20\pi} \sqrt{1 + t^2 + 2t}\, dt = \int_0^{20\pi} (1+t)\, dt = \left(t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{20\pi} = 20\pi + 200\pi^2 \,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 2\cos t \,!$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \,,$$

es hat also -1 als doppelte Nullstelle. Somit hat die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

die allgemeine Lösung

$$x(t) = (a + bt)e^{-t} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} \,.$$

Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, suchen wir, wie bei erzwungenen Schwingungen üblich, nach einer ungedämpften Schwingung mit der erregenden Frequenz, machen also den Ansatz

$$x(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t \,.$$

Dann ist

$$\dot{x}(t) = -\alpha\sin t + \beta\cos t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -\alpha\cos t - \beta\sin t \,;$$

die Differentialgleichung wird also zu

$$(-\alpha + 2\beta + \alpha)\cos t + (-\beta - 2\alpha + \beta)\sin t = 2\cos t\,.$$

Also ist $\alpha = 0$ und $\beta = 1$, die spezielle Lösung ist $\sin t$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist die Summe aus der speziellen Lösung um einer beliebigen Lösung der homogenen Gleichung; die allgemeinste Lösung ist also

$$x(t) = \sin t + (a + bt)e^{-t} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen mit $x(0) = 0$!

Lösung: Da $\sin 0 = 0$ und $e^0 = 1$ ist, sind das offensichtlich gerade die Lösungen mit $a = 0$.

c) Bilden diese Lösungen einen Vektorraum?

Lösung: *Nein,* denn die Summe zweier solcher Lösungen hat den ungedämpften Anteil $2\sin t$, ist also keine Lösung.

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -9x(t) + 12y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -3x(t) + 3y(t)$$

mit $x(0) = a$ und $y(0) = b$!

Lösung: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ des Systems hat das charakteristische Polynom

$$(-9-\lambda)(3-\lambda) + 36 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2\,,$$

-3 ist also Eigenwert der algebraischen Vielfachheit zwei. Die Matrix

$$A + 3E = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

hat offensichtlich Rang eins, da die beiden Zeilen proportional sind; der Eigenraum zum Eigenwert minus drei wird also aufgespannt von dem einen Vektor $\binom{2}{1}$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist somit nur eins.
$(A+3E)^2$ ist die Nullmatrix, da der Hauptraum zu -3 der ganze $\mathbb{R}^2$ sein muß; als zweiten Hauptvektor können wir also einen beliebigen vom Eigenvektor $\binom{2}{1}$ linear unabhängigen Vektor nehmen, etwa $\binom{0}{1}$.
Die Matrix des Basiswechsels ist

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\,,$$

und

$$B = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

wobei die beiden Summanden offensichtlich miteinander kommutieren, da der erste eine Skalarmatrix ist. Also ist

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 6te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$e^{At} = Me^{Bt}M^{-1} = \begin{pmatrix} (1-6t)e^{-3t} & 12te^{-3t} \\ -3te^{-3t} & (1+6t)e^{-3t} \end{pmatrix}$$

ist; die gesuchte Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big(a + (12b - 6a)t\big)e^{-3t} \\ \big(b + (6b - 3a)t\big)e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

b) Für welche Anfangswerte bleiben die Lösungfunktionen für $t \to \infty$ beschränkt?

Lösung: Offensichtlich für alle, denn e^{-3t} geht für $t \to \infty$ viel schneller gegen null als eine lineare Funktion gegen unendlich gehen kann.