Vordiplomsklausur Mathematik für Technische Informatiker

28. März 2001

Diese Klausur besteht aus den drei Teilen

- Analysis I *(25 Punkte)*
- Höhere Mathematik I und II *(50 Punkte)*
- Numerik I *(25 Punkte).*

Für die Bewertung ist ausschließlich die erreichte Gesamtpunktzahl maßgebend.

Da die drei Teile von drei verschiedenen Personen korrigiert werden, bearbeiten Sie bitte *auf jedem Bogen Papier nur Aufgaben aus einem der drei Teile.* Es ist weder notwendig noch erwünscht, daß Sie für jede *Aufgabe* ein eigenes Blatt verwenden. Geben Sie die drei Teile am Ende bitte getrennt ab; es wird drei entsprechend markierte Stapel geben.

Wie bei den Scheinklausuren werde ich Ergebnisse und (je nach Korrekturfortschritt) auch Zwischenergebnisse per E-Mail bekanntgeben; falls Sie entsprechende Mitteilungen wünschen und nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe, schreiben Sie diese bitte auf einem der Blätter mit den Bearbeitungen der HM-Aufgaben neben Ihren Namen.

Schreiben Sie bitte unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen!

Das farbige Klausurpapier ist für Notizen gedacht und sollte i.a. nicht abgegeben werden. Wenn Sie in Ausnahmefällen die endgültige Form Ihrer Bearbeitung einer Aufgabe nur auf diesem Konzeptpapier haben, machen Sie dort bitte einen gut sichtbaren entsprechenden Vermerk und geben Sie die entsprechenden Blätter mit ab.

Als Hilfsmittel sind nur Taschenrechner ohne Graphikdisplay und ohne höhere Programmiersprache erlaubt. Sie haben vier Stunden zur Bearbeitung der Klausur, wobei es Ihnen überlassen bleibt, wie Sie diese Zeit auf die drei Fächer verteilen möchten.

Informationen über den Fortschritt der Korrektur sowie die Lösungen der HM-Aufgaben werden über den URL http://hilbert.math.uni-mannheim.de/hm/ erreichbar sein.

Aufgaben zur Höheren Mathematik

50 Punkte

Wolfgang K. Seiler

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = f(t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ bilden einen reellen Vektorraum

2) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi: \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) = f(28) + f'(3) + f''(2001)$ ist linear.

3) *Richtig oder falsch:* Wenn $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in Zylinderkoordinaten ausgedrückt nicht von der Winkelvariablen abhängt, sind die Niveaflächen von f Zylinder.

4) Was ist $\iiint\limits_{\mathcal{K}} x \, dx \, dy \, dz$ für $\mathcal{K} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 100 \right\}$?

5) *Richtig oder falsch:* Der Korrelationskoeffizient der Datenpaare $(\sin j/10, \cos j/10)$ mit $j = 1, \ldots, 10$ ist positiv.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y - az &= 8 \\ 2x + y + (a+3)z &= 7 \\ x + ay + z &= 4a + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

M sei die Menge aller Funktionen der Form $f(x) \cdot g(x)$, wobei $f(x) = ax + b$ ein lineares Polynom ist und $g(x)$ eine der Funktionen $1, \sin x, \cos x$.

a) Bestimmen Sie eine Basis des von M erzeugten reellen Vektorraums V!

b) Zeigen Sie, daß $\varphi: V \to V;\ f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung definiert und bestimmen Sie deren Kern und Bild!

c) Ist V darstellbar als Summe von Kern und Bild von φ ?

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* angegebenen Basis!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \end{pmatrix}!$$

b) Geben Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts an! (Beachten Sie bitte, daß hier *nicht* verlangt wird, Eigenvektoren und Eigenräume zu bestimmen!)

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode π und sei im Intervall $(-\pi/2, \pi/2]$ gleich $\sin t$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

d) Für welche $t\in\mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie für die restlichen Werte von t?

e) Tritt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen auf, und wenn ja, für welche Werte von t?

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei gleich eins für $\pi\le|t|\le 3\pi$ und ansonsten null.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f!

b) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f!

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Gestalt der Kurve

$$\gamma: [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto \left(t\cos(t), t\sin(t), \frac{\sqrt{8}}{3}t^{3/2}\right)$$

geometrisch!

b) Berechnen Sie die Bogenlänge von γ!

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 2\cos t\,!$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen mit $x(0) = 0$!

c) Bilden diese Lösungen einen Vektorraum?

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -9x(t) + 12y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -3x(t) + 3y(t)$$

mit $x(0) = a$ und $y(0) = b$!

b) Für welche Anfangswerte bleiben die Lösungfunktionen für $t\to\infty$ beschränkt?

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?