Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 8. Dezember 2000

a) Finden Sie einen vierdimensionalen Vektorraum von Lösungen der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) = y(t)$ und bestimmen Sie dasjenige Element des Lösungsraums, für das $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\ddot{y}(0) = 3$ und $y^{(3)}(0) = 0$ ist!

b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \dots \quad \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t)\ !$$

c) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

d) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = 0\,!$$

e) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um auch die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = \sin^3 t$$

zu lösen!

Hinweis:
$$\int (1 - x^2)e^{-x}\,dx = (x+1)^2 e^{-x}$$

f) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 18y(t) = 0\,!$$

g) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 18y(t) = 90\cos 3t\,!$$

h) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 90\cos 3t\,!$$

i) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$!

j) Für eine $n \times n$-Matrix A sei

$$\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA}) \quad \text{und} \quad \cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})\,.$$

Zeigen Sie: $\sin^2 A + \cos^2 A = E$

k) Finden Sie eine Matrix $P \neq 0$, so daß für alle $n \times n$-Matrizen A und alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(A + rP) = \sin A \quad \text{und} \quad \cos(A + rP) = \cos A\,.$$