Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

10. Februar 2001

Klausur und 15. Übungsblatt Höhere Mathematik II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\begin{pmatrix}1\\1\\i\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{C}^3$!

Lösung: Wir suchen zunächst (nach Gram-Schmidt) eine zum ersten Vektor orthogonale Linearkombination der beiden Vektoren. Da

$$\begin{pmatrix}1\\1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\i\end{pmatrix}=3 \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix}1\\1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}=1\cdot1+1\cdot(-i)+i\cdot1=1$$

ist, bilden

$$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\i\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\1\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1-3i\\i-3\end{pmatrix}$$

eine Orthogonalbasis; die zugehörige Ortho*normal*basis besteht aus $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{b}_1$ und $\frac{1}{\sqrt{24}}\vec{b}_2$.

2) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A\in\mathbb{R}^{10\times10}$ mit $a_{ij}=ij$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig,* denn nach dem Kommutativgesetz der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist sie symmetrisch.

3) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t)+y(t)=0$ mit $y(0)=1$ hat genau die Funktion $y(t)=\cos(t)$ als Lösung.

Lösung: *Falsch;* auch jede Funktion $\cos t+a\sin t$ mit $a\in\mathbb{R}$ ist Lösung.

4) *Richtig oder falsch:* Alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t)-2\dot{y}(t)+y(t)=0$ gehen für $t>0$ monoton gegen Null.

Lösung: *Falsch:* Da das charakterischtische Polynom die doppelte Lösung 1 hat, wachsen alle Lösungen außer der Nullösung unbeschränkt.

5) Welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t)=x(t)^2-y(t)^2,\qquad \dot{y}(t)=x(t)^2+x(t)y(t)+y(t)^2-12\,?$$

Lösung: Das Gleichungssystem

$$x^2-y^2=0\quad\text{und}\quad x^2+xy+y^2-12=0$$

zeigt, daß $x = \pm y$ sein muß; setzt man dies ein in die zweite Gleichung, folgt für $x = y$, daß $3x^2 = 12$ oder $x = y = \pm 2$ sein muß; für $x = -y$ muß $x^2 = 12$ oder $x = -y = \pm\sqrt{12}$ sein. Die Gleichgewichtspunkte sind also $(2, 2)$, $(-2, -2)$, $(\sqrt{12}, -\sqrt{12})$ und $(-\sqrt{12}, \sqrt{12})$.

6) Ein Widerstand werde gemäß der Gleichung $R = \frac{U}{I}$ durch Messung von Spannung und Stromstärke bestimmt. Wie wirken sich die Meßfehler ΔU der Spannung U und ΔI der Stromstärke I auf den berechneten Wert von R aus?

Lösung: Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist

$$\Delta R \approx \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 (\Delta U)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 (\Delta I)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{I}\right)^2 + \frac{U^2}{I^4}(\Delta I)^2}\,.$$

7) *Richtig oder falsch:* Für $i = 1, \dots, N$ sei $x_i^3 = y_i^5$. Dann hat die Menge der Paare (x_i, y_i) einen positiven Korrelationskoeffizienten.

Lösung: *Richtig,* denn dann ist $y_i = x_i^{3/5}$, und diese Funktion ist monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie: $8\sin^4 t = \cos 4t - 4\cos 2t + 3$!

Lösung:

$$\begin{aligned} 8\sin^4 t = 8 \cdot \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it})^4 = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{2} \\ = \cos 4t - 4\cos 2t + 3\,. \end{aligned}$$

b) Was ist $\int \sin^4 t\,dt$?

Lösung:

$$\int \sin^4 t\,dt = \frac{1}{8}\left(\int \cos 4t\,dt - 4\int \cos 2t\,dt + \int 3\,dt\right) = \frac{\sin 4t}{32} - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{3}{8}t + C\,.$$

c) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte von $\sin^4 t$!

Lösung: Die LAPLACE-Transformierte von $\cos at$ ist $\frac{s}{s^2+a^2}$, die von 1 ist $\frac{1}{s}$. Wegen der Linearitätseigenschaft ist also

$$\mathcal{L}\{\sin^4 t\}(s) = \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{3}{8s}\,.$$

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) + 36y(t) = 1440\sin^4 t$ mit $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$! Sie können dazu folgende Tabelle von LAPLACE-Transformationen benutzen $(a, b > 0)$:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
$2\sin^2 \frac{at}{2}$	$\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$	$2\sinh^2 \frac{at}{2}$	$\frac{a^2}{s(s^2-a^2)}$
$\frac{\sin bt}{b} - \frac{\sin at}{a}$	$\frac{a^2-b^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{\sinh bt}{b} - \frac{\sin at}{a}$	$\frac{a^2+b^2}{(s^2+a^2)(s^2-b^2)}$
$\cos bt - \cos at$	$\frac{s(a^2-b^2)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\cosh bt - \cos at$	$\frac{s(a^2+b^2)}{(s^2+a^2)(s^2-b^2)}$

Lösung: Ist $F(s)$ die LAPLACE-Transformierte der gesuchten Lösungsfunktion $y(t)$, so hat $\ddot{y}(t)$ auf Grund der Anfangsbedingungen die LAPLACE-Transformierte $s^2F(s)$; LAPLACE-Transformation der gesamten Gleichung führt also auf

$$(s^2+36)F(s) = \frac{180s}{s^2+4^2} - \frac{720s}{s^2+2^2} + \frac{540}{s} \qquad \text{oder}$$
$$F(s) = \frac{180s}{(s^2+4^2)(s^2+6^2)} - \frac{720s}{(s^2+2^2)(s^2+6^2)} + \frac{540}{s(s^2+6^2)}\,.$$

Mit Hilfe der Tabelle folgern wir

$$\mathcal{L}\{\cos 4t - \cos 6t\}(s) = \frac{20s}{(s^2+4^2)(s^2+6^2)} \Longrightarrow \mathcal{L}\{9\cos 4t - 9\cos 6t\}(s) = \frac{180s}{(s^2+4^2)(s^2+6^2)}$$
$$\mathcal{L}\{\cos 2t - \cos 6t\}(s) = \frac{32s}{(s^2+2^2)(s^2+6^2)} \Longrightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{45}{2}\cos 2t - \frac{45}{2}\cos 6t\right\}(s) = \frac{720s}{(s^2+4^2)(s^2+6^2)}$$
$$\mathcal{L}\{2\sin^2 3t\} = \frac{36}{s(s^2+6^2} \Longrightarrow \mathcal{L}\{30\sin^2 3t\} = \frac{540}{s(s^2+6^2)}$$

Somit hat

$$\begin{aligned} y(t) &= 9\cos 4t - 9\cos 6t - \frac{45}{2}\cos 2t + \frac{45}{2}\cos 6t + 30\sin^2 3t \\ &= \frac{27}{2}\cos 6t + 9\cos 4t - \frac{45}{2}\cos 2t + 30\sin^2 3t \end{aligned}$$

LAPLACE-Transformierte $F(s)$ und ist die gesuchte Lösungsfunktion. Mit

$$\sin^2 3t = \frac{1}{2}(1-\cos 6t)$$

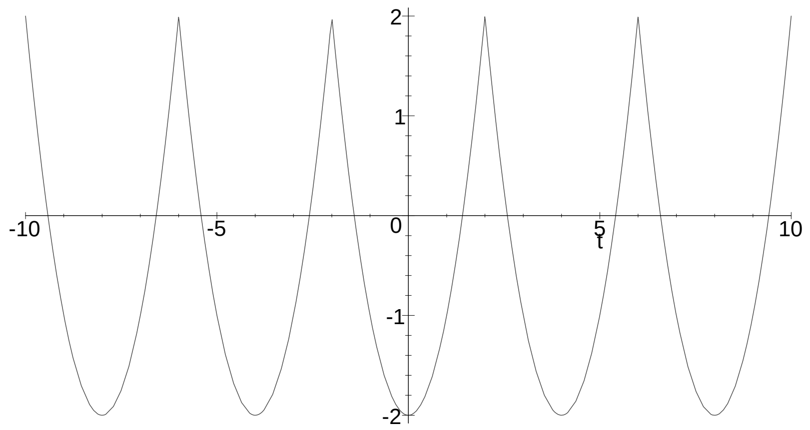
ergibt sich die etwas übersichtlichere Form $y(t) = -\frac{3}{2}\cos 6t + 9\cos 4t - \frac{45}{2}\cos 2t + 15\,.$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode vier, und für $t \in [-2,\,2]$ sei $f(t) = t^2 - 2$.

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-10,\,10]$!

Lösung:



b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

Lösung: f hat die Periode $T=4$, also die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Da die Funktion offensichtlich gerade ist, gibt es in der FOURIER-Reihe von f keine Sinusterme.

Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(t^2-2)\,dt = \frac{2}{4}\cdot\frac{8}{3} - \frac{8}{4} = -\frac{2}{3}\,.$$

Die Koeffizienten der höheren Cosinusterme lassen sich berechnen als

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^2\cos k\omega t\,dt - \frac{1}{2}\cdot 2\int_{-2}^{2}\cos k\omega t\,dt\,.$$

Das letzte Integral verschwindet, da hier der Cosinus über k volle Perioden integriert wird; bleibt also das erste.

Eine Stammfunktion von $t^2\cos k\omega t$ kann man sich durch zweimalige partielle Integration verschaffen:

$$\begin{aligned}\int t^2\cos k\omega t\,dt &= t^2\frac{\sin k\omega t}{k\omega} - \int 2t\frac{\sin k\omega t}{k\omega}\,dt\\ &= t^2\frac{\sin k\omega t}{k\omega} - 2t\cdot\frac{-\cos k\omega t}{(k\omega)^2} + \int 2\cdot\frac{-\cos k\omega t}{(k\omega)^2}\,dt\\ &= t^2\frac{\sin k\omega t}{k\omega} + 2t\cdot\frac{\cos k\omega t}{(k\omega)^2} - 2\frac{\sin k\omega t}{(k\omega)^3} + C\,.\end{aligned}$$

Diese Funktion müssen wir an den Stellen $t = \pm 2$ auswerten; das Argument der trigonometrischen Funktionen ist also jeweils $\pm 2k\omega = \pm 2k\cdot\frac{\pi}{2} = \pm k\pi$. Da dort der Sinus verschwindet und

$$\cos(\pm k\pi) = \begin{cases}1 & \text{für gerade } k\\ 0 & \text{für ungerade } k\end{cases} = (-1)^k$$

ist, erhalten wir das Ergebnis

$$a_k = \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\frac{\cos k\omega t}{(k\omega)^2}\bigg|_{-2}^{2} = \big(2-(-2)\big)\frac{(-1)^k}{(k\omega)^2} = 4\cdot\frac{(-1)^k}{(k\omega)^2} = \frac{16}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{k^2}\,.$$

Die Fourier-Reihe von f ist also

$$-\frac{2}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}t\,.$$

c) Für welche $t\in\mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$?

Lösung: Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Reihe für alle $t\in\mathbb{R}$.

d) Tritt bei der Konvergenz das Gibbs-Phänomen auf?

Lösung: Nein, denn als stetige Funktion hat f keine Sprungstellen.

e) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$?

Lösung: Da die Fourier-Reihe für jeden Wert t gegen $f(t)$ konvergiert, ist insbesondere für $t=0$, wo alle Cosinusterme den Wert eins annehmen,

$$-2 = f(0) = -\frac{2}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2},\quad\text{d.h.}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\frac{\pi^2}{16} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = \begin{cases}e^t & \text{für } |t|<2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$!

Lösung: Die FOURIER-Transformierte ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-2}^{2} e^t e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-2}^{2} e^{(1-i\omega)t}\,dt = \frac{e^{2-2i\omega} - e^{-(2-2i\omega)}}{1-i\omega}\,.$$

Wenn man will, kann man das auch als $\dfrac{2\sinh(2-2i\omega)}{1-i\omega}$ schreiben.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
Eine ebene Welle der Kreisfrequenz ω_0 treffe auf ein Hindernis mit Durchlässigkeitsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x-a| < \frac{a}{2} \text{ oder } |x+a| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

a) Wie sieht das Hindernis aus?

Lösung: Es ist ein Doppelspalt: Der erste Spalt reicht von $-3a/2$ bis $-a/2$, der zweite von $a/2$ bis $3a/2$.

b) Welches FRAUNHOFER-Beugungsbild kann man beobachten?

Lösung: Das Beugungsbild ist die FOURIER-Transformierte der Durchlässigkeitsfunktion, ausgewertet im Punkt $u = k\sin\theta$, wobei k die Wellenzahl und θ den Betrachtungswinkel bezeichnet.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iut}\,dt = \int_{-3a/2}^{a/2} e^{-iut}\,dt + \int_{a/2}^{3a/2} e^{-iut}\,dt \\ &= \frac{e^{iua/2} - e^{3iua/2} + e^{-3iua/2} - e^{-iua/2}}{-iu} = \frac{2}{u}\left(\sin\frac{3ua}{2} - \sin\frac{ua}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

Die beobachteten Intensitäten sind das Betragsquadrat davon, also $\dfrac{4}{u^2}\left(\sin\dfrac{3ua}{2} - \sin\dfrac{ua}{2}\right)^2$.

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 & -7 \\ -1 & -3-\lambda & -1 \\ 1 & 8 & 6-\lambda \end{vmatrix}\,;$$

da es keine offensichtliche Möglichkeit zur Vereinfachung der Determinante gibt, entwickeln wir einfach nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned}&(-2-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 8 & 6-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -7 & -7 \\ 8 & 6-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -3-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)\big((-3-\lambda)(6-\lambda)+8\big) + \big(7\lambda - 42 + 56\big) + \big(7 - 21 - 7\lambda\big) \\ &= -(\lambda+2)(-18+3\lambda-6\lambda+\lambda^2+8) + (7\lambda-14) + (14-7\lambda) \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10)\,.\end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen des quadratischen Faktors haben Produkt -10 und Summe 3, sind also 5 und -2. Somit hat

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 5)$$

die beiden Nullstellen -2 und 5.

Es gibt also zwei Eigenwerte: $\lambda = 5$ hat die algebraische und damit auch geometrische Vielfachheit eins, $\lambda = -2$ hat die algebraische Vielfachheit zwei. Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheit müssen wir die Dimension des Eigenraums berechnen: Die Matrix

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

hat offensichtlich den Rang zwei, denn die beiden letzten Spalten sind identisch, und die erste ist davon linear unabhängig. Also ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$ nur eindimensional; der Eigenwert hat somit die geometrische Vielfachheit eins.

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

Lösung: Der speziellen Form der Matrix $A + 2E$ sieht man sofort an, daß der Vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem löst; er spannt also den Eigenraum auf.

Zur Bestimmung des Hauptraums berechnen wir

$$(A + 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -49 & -49 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 49 \end{pmatrix} ;$$

im Hauptraum liegen also *alle* Vektoren, deren zweite und dritte Komponente sich zu null ergänzen. Als von $\vec{v}_1$ linear unabhängigen zweiten Basisvektor des Hauptraums können wir zum Beispiel

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nehmen.

Um zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ zu kommen, brauchen wir noch einen Eigenvektor zum Eigenwert fünf. Hier ist

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} ;$$

es genügt also, dier erste und die dritte Zeile zu betrachten. Wenn wir die erste gleich durch -7 dividieren, erhalten wir für die Komponenten des gesuchten Eigenvektors die beiden Gleichungen

$$x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad x + 8y + z = 0 ,$$

aus denen sofort folgt, daß $y = 0$ sein muß und $x = -z$. Als dritten Basisvektor können wir also zum Beispiel den Vektor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nehmen.

c) Berechnen Sie die Matrizen e^A und e^{At} !

Lösung: Wir müssen zunächst die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bestimmen. Da in den Spalten dieser Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, brauchen wir also die Vektoren $A\vec{v}_i$, was im Falle der beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ kein Problem ist: Die werden einfach mit dem zugehörigen Eigenwert multipliziert. Für $\vec{v}_2$ müssen wir rechnen:

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -2\vec{v}_2 - \vec{v}_1 .$$

Somit ist die neue Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Diagonalmatrix D und die hintere Matrix N offensichtlich kommutieren. Also ist

$$e^M = e^D e^N = e^D(E+N) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2} & -e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix} .$$

Genauso folgt auch

$$e^{Mt} = e^{Dt} e^{Nt} = e^{Dt}(E+Nt) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} .$$

Dies muß nun noch zurücktransformiert werden auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$; die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zur neuen Basis enthält die Vektoren $\vec{v}_i$ als Spalten, ist also

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse dazu berechnet man entweder nach Gauss, oder aber, indem man die Vektoren der Standardbasis in der neuen Basis hinschreibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{v}_1 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 ;$$

somit ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und Ausmultiplizieren führt auf

$$e^{At} = Be^{Mt}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{5t} & e^{-2t} - e^{5t} \\ -te^{-2t} & e^{-2t} - te^{-2t} & -te^{-2t} \\ te^{-2t} & e^{5t} - e^{-2t} + te^{-2t} & e^{5t} + te^{-2t} \end{pmatrix} .$$

Einsetzen von $t = 1$ schließlich oder die Berechnung von Be^MB^{-1} führen auf

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} - e^5 & e^{-2} - e^5 \\ -e^{-2} & 0 & -e^{-2} \\ e^{-2} & e^5 & e^5 + e^{-2} \end{pmatrix} .$$

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -2x(t) - 7y(t) - 7z(t) &\quad \text{mit} \quad x(0) &= 0 \\
\dot{y}(t) &= -x(t) - 3y(t) - z(t) &\quad \text{mit} \quad y(0) &= 1\ ! \\
\dot{z}(t) &= x(t) + 8y(t) + 6z(t) &\quad \text{mit} \quad z(0) &= -1
\end{aligned}$$

Lösung: Dies ist ein System homogener linearer Differentialgleichungen mit Matrix A; die gesuchte Lösung ist also

$$e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix},$$

d.h. $x(t) = 0, \quad y(t) = e^{-2t} \quad \text{und} \quad z(t) = -e^{-2t}$.

e) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein, denn A hat auch den Eigenwert 5. Stört man die Anfangsbedingungen auch nur leicht in Richtung des zugehörigen Eigenvektors, kommen Terme mit e^{5t} ins Spiel, die Lösungsfunktionen gehen also betragsmäßig gegen unendlich statt gegen null.

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungskurven der Differentialgleichung $\big(ty(t) - t\big)\dot{y}(t) + y(t) = 0$!

Lösung: Dividiert man durch $ty(t)$, wird die Gleichung zu

$$\frac{y(t)-1}{y(t)}\dot{y}(t) + \frac{1}{t} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1-y(t)}{y(t)}\dot{y}(t) = \frac{1}{t}\,;$$

man erhält also eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Für die Lösungskurven gilt

$$\int \frac{1-y}{y}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} - 1\right)\,dt = \int \frac{dt}{t}$$

oder

$$\ln y + y = \ln t + C\,.$$

Dieser implizite Zusammenhang läßt sich zwar in der Form

$$t = ye^{y-C}$$

nach t auflösen, nicht aber nach y.

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert der Funktion $\sin^2 x + \cos^2 y$ auf der Menge $\mathcal{K} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 \le 1\big\}$!

Lösung: Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$ zunächst im Innern der Kreisscheibe. Falls es dort ein Extremum gibt, muß der Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin x \cos x \\ -2\sin y \cos y \end{pmatrix}$$

verschwinden. Das Produkt von Sinus und Cosinus verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von $\pi/2$; außer der Null hat allerdings keines von diesen Betrag kleiner eins. Also ist nur der Nullpunkt ein Kandidat; dort ist die HESSE-Matrix

$$H_f(x,y) = 2\begin{pmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 0 \\ 0 & \sin^2 x - \cos^2 x \end{pmatrix} \quad \text{gleich} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und somit indefinit, so daß ein Sattelpunkt vorliegt.
Für ein Extremum auf dem Rand muß ∇f proportional sein zu ∇g für

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{mit} \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} .$$

(Offensichtlich verschwindet ∇g nirgends auf dem Rand.) Also muß gelten

$$2 \sin x \cos x = 2\lambda x \quad \text{und} \quad -2 \sin x \cos x = 2\lambda y .$$

Falls x und y beide nicht verschwinden, folgt daraus

$$\lambda = \frac{\sin x \cos x}{x} = -\frac{\sin y \cos y}{y} .$$

Das kann aber unmöglich gelten, denn im Bereich $|x| \leq 1$ nimmt

$$\varphi(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} = \cos x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

nur positive Werte an. Also muß entweder x verschwinden – dann ist $y = \pm 1$, oder y verschwindet – dann ist $x = \pm 1$. Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$f(0, \pm 1) = \cos^2(1) \approx 0{,}292 \quad \text{und} \quad f(\pm 1, 0) = 1 + \sin^2(1) \approx 1{,}708 .$$

Da der Rand abgeschlossen und beschränkt ist, muß die Funktion dort sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum annehmen; somit ist der maximale Wert von f (sowohl auf dem Rand als auch auf ganz $\mathcal{K}$) gleich $1 + \sin^2(1)$, und der minimale ist $\cos^2(1)$.