Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

10. Februar 2001

Klausur und 15. Übungsblatt Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je* ***zwei*** *Punkte*

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\begin{pmatrix}1\\1\\i\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{C}^3$!

2) Richtig oder falsch: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ mit $a_{ij} = ij$ ist diagonalisierbar.

3) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) + y(t) = 0$ mit $y(0) = 1$ hat genau die Funktion $y(t) = \cos(t)$ als Lösung.

4) Richtig oder falsch: Alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$ gehen für $t > 0$ monoton gegen Null.

5) Welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2, \qquad \dot{y}(t) = x(t)^2 + x(t)y(t) + y(t)^2 - 12\,?$$

6) Ein Widerstand werde gemäß der Gleichung $R = \frac{U}{I}$ durch Messung von Spannung und Stromstärke bestimmt. Wie wirken sich die Meßfehler ΔU der Spannung U und ΔI der Stromstärke I auf den berechneten Wert von R aus?

7) Richtig oder falsch: Für $i = 1, \dots, N$ sei $x_i^3 = y_i^5$. Dann hat die Menge der Paare (x_i, y_i) einen positiven Korrelationskoeffizienten.

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

a) Zeigen Sie: $8\sin^4 t = \cos 4t - 4\cos 2t + 3$!

b) Was ist $\int \sin^4 t\,dt$?

c) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $\sin^4 t$!

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) + 36y(t) = 1440\sin^4 t$ mit $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$!
Sie können dazu folgende Tabelle von Laplace-Transformationen benutzen $(a, b > 0)$:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
$2\sin^2 \frac{at}{2}$	$\frac{a^2}{s(s^2+a^2)}$	$2\sinh^2 \frac{at}{2}$	$\frac{a^2}{s(s^2-a^2)}$
$\frac{\sin bt}{b} - \frac{\sin at}{a}$	$\frac{a^2-b^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{\sinh bt}{b} - \frac{\sin at}{a}$	$\frac{a^2+b^2}{(s^2+a^2)(s^2-b^2)}$
$\cos bt - \cos at$	$\frac{s(a^2-b^2)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\cosh bt - \cos at$	$\frac{s(a^2+b^2)}{(s^2+a^2)(s^2-b^2)}$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode vier, und für $t \in [-2, 2]$ sei $f(t) = t^2 - 2$.

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-10, 10]$!

b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f!

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$?

d) Tritt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen auf?

e) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{für } |t| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Eine ebene Welle der Kreisfrequenz ω_0 treffe auf ein Hindernis mit Durchlässigkeitsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x - a| < \frac{a}{2} \text{ oder } |x + a| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Wie sieht das Hindernis aus?

b) Welches FRAUNHOFER-Beugungsbild kann man beobachten?

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

c) Berechnen Sie die Matrizen e^A und e^{At}!

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 7y(t) - 7z(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) &= -x(t) - 3y(t) - z(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \;! \\ \dot{z}(t) &= x(t) + 8y(t) + 6z(t) \quad \text{mit} \quad z(0) = -1 \end{aligned}$$

e) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die Lösungskurven der Differentialgleichung $\big(ty(t) - t\big)\dot{y}(t) + y(t) = 0$!

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert der Funktion $\sin^2 x + \cos^2 y$ auf der Menge $\mathcal{K} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2 + y^2 \le 1\big\}$!