WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

18. Januar 2001

12. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede lineare Differentialgleichung hat einen integrierenden Faktor, der sie exakt macht.

2) Richtig oder falsch: Bei der exakten Differentialgleichung $a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0$ sei $a(y,t)$ überall von null verschieden. Dann geht durch jeden Punkt (t_0, y_0) höchstens eine Lösungskurve.

3) Richtig oder falsch: Die Gleichgewichtspunkte eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems bilden eine Vektorraum.

4) Welche Fixpunkte hat das System $\dot{x}(t) = 2x(t) - 5y(t)$ und $\dot{y}(t) = 10y(t) - 4x(t)$?

5) Ist der Nullpunkt ein stabiler Fixpunkt von $\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$?

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen einen Zusammenhang $F(y,t) = 0$ zwischen y und t. Lösen Sie, falls möglich, *explizit* auf nach y und untersuchen Sie, falls das nicht geht, wo $F(y,t) = 0$ eine eindeutige Funktion $y = y(t)$ definiert!

a) $t\dot{y}(t) + e^t = 1$ *b)* $\big(t\cos y(t) - 2y(t)\big)\dot{y}(t) + t + \sin y(t) = 0$

c) $t^2 \cos y(t)\dot{y}(t) = 1 + 3t \sin y(t)$ *Hinweis:* Diese Gleichung wird viel angenehmer, wenn Sie anstelle von $y(t)$ die Funktion $u(t) = \sin y(t)$ betrachten!)

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $(0,0)$ des Raubtier-Beutetier-Systems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)\,!$$

b) Linearisieren Sie die Raubtier-Beutetier-Gleichung in der Umgebung des anderen Fixpunkts und lösen Sie das linearisierte System. Welche Form haben die Lösungskurven?

c) Das Raubtier-Beutetier-System kann auch benutzt werden zur Beschreibung eines Systems aus einem Nützling (Raubtier) und einem Schädling (Beutetier). Wie verschiebt sich das Gleichgewicht, wenn man durch ein Schädlingsbekämpfungsmittel die Wachstumsrate α der Schädlinge auf ein Zehntel senkt und (wegen der Nebenwirkungen) γ um 10% erhöht?

d) Während des ersten Weltkriegs stieg der Anteil an Raubfischen in den Netzen italienischer Fischer dramatisch an. Erklären Sie dies durch den kriegsbedingten Rückgang der Fischerei!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
Welche Bedingungen müssen die Parameter p, b und r des LORENZ-Systems

$$\dot{x}(t) = p\big(y(t) - x(t)\quad \dot{y}(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \quad \text{und} \quad \dot{z}(t) = -bz(t) + x(t)y(t)$$

erfüllen, damit der Nullpunkt ein stabiler Gleichgewichtspunkt wird?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 25. Januar 2001, um 13.45 Uhr