Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

14. Dezember 2000

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Wenn alle Eigenwerte der $n \times n$-Matrix A gleich eins sind, ist A die Einheitsmatrix.

2) Richtig oder falsch: Die Eigenwerte der Matrix $2A$ sind doppelt so groß wie die von A.

3) Richtig oder falsch: Jede reelle 3×3-Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

4) Richtig oder falsch: Ein Eigenvektor $\vec{v}$ der Matrix A zum Eigenwert λ ist Eigenvektor von e^A zum Eigenwert e^λ.

5) Richtig oder falsch: Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist ${}^t\!A\overline{A}$ Hermitesch.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 \\ -28 & 15 & 14 \\ 16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$!

b) Was ist e^A?

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 16x(t) && - 8z(t), && x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) &= -28x(t) + 15y(t) && + 14z(t), && y(0) = 0 \\ \dot{z}(t) &= 16x(t) && - 8z(t), && z(0) = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$!

b) Bezüglich welcher Basis von $\mathbb{C}^2$ hat A welche Diagonalgestalt?

c) Auf $V = [1, t, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t] \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei die lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ definiert durch $\varphi(f) = \frac{d^2f}{dt^2}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von φ!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Ein starrer Körper bewege sich mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um seinen Massenmittelpunkt; der Drehimpuls ist dann bekanntlich gleich $J \cdot \vec{\omega}$ mit $J =$ Trägheitstensor.

a) Zeigen Sie unter der (physikalisch sinnvollen) Annahme, daß die 3×3-Matrix J drei positive reelle Eigenwerte hat, daß der Drehimpuls bei (betragsmäßig) konstanter Winkelgeschwindigkeit genau dann maximalen *bzw.* minimalen Betrag hat, wenn ω ein Eigenvektor zum größten *bzw.* kleinsten Eigenwert von J ist.

b) Das von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelepiped mit Massendichte $\rho = 1/16$ hat den Trägheitstensor

$$J = \begin{pmatrix} 40 & -2 & 0 \\ -2 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Achsen für den maximalen und den minimalen Drehimpuls!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 21. Dezember 2000, um 13.45 Uhr