Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

7. Dezember 2000

8. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = y(t)$ hat nur die Exponentialfunktion als Lösung.

2) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

3) Finden Sie eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so daß $e^A = -E$ die negative Einheitsmatrix ist!

4) *Richtig oder falsch:* Für eine $n \times n$-Matrix A gilt: $\det e^A = e^{\det A}$.

5) *Richtig oder falsch:* (A_i) sei eine konvergente Folge von $n\times n$-Matrizen. Dann konvergiert auch die Folge der Matrizen e^{A_i}.

6) *Richtig oder falsch:* $e^A \cdot e^{(A^2)} = e^{(A^2)} \cdot e^A$.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Beim radioaktiven Zerfall gemäß $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ bezeichnet man den Zeitpunkt $t_{\frac{1}{2}}$, in dem $m(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} m_0$ ist, als *Halbwertszeit.* Für das Cäsium 137, das am 26. April 1986 bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl freigesetzt wurde, ist $t_{\frac{1}{2}} = 30{,}14$ Jahre. Wieviel Prozent des Cäsiums 137 sind bis zum 26. Oktober 2000 zerfallen?

b) Die C^{14}-Methode zur radioaktiven Datierung beruht darauf, daß das stabile Kohlenstoffisotop C^{12} und das radioaktive C^{14} in lebenden Organismen in einem festen Massenverhältnis stehen; nach dem Tod des Organismus zerfällt das vorhandene C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5763 Jahren, ohne daß neues nachkommt. Bei einer Holzprobe aus den Höhlen von Lascoux maß man 0,97 Zerfälle pro Gramm und Minute; für lebendes Holz wären 6,68 Zerfälle normal. Wie alt ist die Probe?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}\cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Gilt diese Formel auch für negative ganze Zahlen n?

c) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{At} !

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = -x(t)+y(t)$ und $\dot{y}(t) = -y(t)$

e) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + y(t) + 10 \sin t = 0$ um in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung!

b) Lösen Sie dieses System durch Variation der Konstanten!

c) Was ist die allgemeine Lösung der Gleichung aus *a)*? Interpretieren Sie diese!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 14. Dezember 2000, um 13.45 Uhr