Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*30. November 2000*

# 7. Übungsblatt Höhere Mathematik II

**Fragen:** *(je ein Punkt)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1)* Was ist $\mathcal{L}\{\sin(at+b)\}(s)$?

*2)* Was ist $\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s)$?

*3)* *Richtig oder falsch:* Falls die Fourier-Transformierte einer Funktion $f$ existiert, existiert auch ihre Laplace-Transformierte.

*4)* *Richtig oder falsch:* Falls es reelle Zahlen $c, M$ gibt, so daß $|f(t)| < Me^{ct}$ ist für alle $t \geq 0$, existierts $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, s > c$.

*5)* *Richtig oder falsch:* Für ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten seien nur für $r$ der $n$ Funktionen Anfangsbedingungen festgelegt. Dann bilden die Lösungen, die diesen Anfangsbedingungen genügen, einen $(n-r)$-dimensionalen Vektorraum.

**Aufgabe 1:** (*10 Punkte)*
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe einer Tabelle von Laplace-Transformationen (z.B. Bronstein/Semendjajew, 4.4.3):

*a)* $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) = te^{-3t}, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

*b)* $\ddot{x}(t) - 9x(t) = \cos 3t, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

*c)* $\ddot{x}(t) + 9x(t) = \cosh 3t, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

*d)* $\dot{x}(t) + 5x(t) = \sin 3t, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

*e)* $\ddot{x}(t) + x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

**Aufgabe 2:** (*5 Punkte)*

*a)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode $T$. Dann ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int\limits_0^T f(t)e^{-st}\, dt$.

*b)* Berechnen Sie $\int\limits_0^T (1-\cos\omega t)e^{-st}\, dt$ für $T = 2\pi/\omega$ aus der (bekannten) Laplace-Transformierten von $1-\cos\omega t$!

*c)* Betrachten Sie nun die Funktion mit Periode $2T$, für die gilt

$$f(t) = \begin{cases} 1-\cos\omega t & \text{falls } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{falls } T \leq t \leq 2T \end{cases},$$

und berechnen Sie deren Laplace-Transformierte!

*d)* $f(t)$ sei der Rechteckimpuls mit Periode $2\pi$, der zwischen $0$ und $\pi$ gleich einer Konstanten $c$ ist und gleich null für den Rest der Periode. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0\,.$$

**Abgabe** bis zum Donnerstag, dem 7. Dezember 2000, um 13.45 Uhr