Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

9. November 2000

4. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sum_{k=0}^{\infty} e^{k\cdot i\omega t} = \frac{1}{1-e^{i\omega t}} = \frac{1-e^{-i\omega t}}{2-2\cos\omega t}$, falls ω kein Vielfaches von 2π ist.

2) Richtig oder falsch: Die Funktion $e^{-t}\cos t$ ist stark abfallend.

3) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(t)=1$ für $|t|\le 1$ und $f(t)=0$ sonst ist stark abfallend.

4) Richtig oder falsch: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

5) Richtig oder falsch: Das Produkt zweier stark abfallender Funktionen ist stark abfallend.

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für ein trigonometrisches Polynom f und ein beliebiges $g\in L(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist $f*g$ ein trigonometrisches Polynom.

b) Geben Sie explizit eine Funktion f an, so daß $f*g=\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$ ist, wobei c_k den k-ten Fourier-Koeffizienten von g bezeichnet!

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

Berechnen Sie den Klirrfaktor

a) für eine periodischen Rechteckschwingung

b) für eine Sägezahnschwingung!

Aufgabe 3: (*7 Punkte)*

Für jedes $T>1$ sei eine Funktion $f_T\colon \begin{cases} \left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac12\le t\le\frac12 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{cases}$ definiert; sie werde periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode T.

a) Skizzieren Sie die Funktion f_T im Intervall $[-2T,2T]$!

b) Zeigen Sie, daß f_T eine Fourier-Reihe der Form $a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{T}\cdot t\right)$ hat!

c) Berechnen Sie die Koeffizienten a_k!

d) Finden Sie eine Funktion $C\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ \omega\mapsto C(\omega)$, für die gilt $a_k=C\left(\frac{2k\pi}{T}\right)$!

e) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f_\infty\colon \begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac12\le t\le\frac12 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{cases}$ und vergleichen Sie mit $C(\omega)$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 16. November 2000, um 13.45 Uhr