Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

28. Oktober 2000

Nachklausur und 13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die ungeraden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

Lösung: *Richtig,* denn für zwei ungerade Funktionen f, g und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda f + \mu g$ wieder ungerade:
$$\lambda f(-t) + \mu g(-t) = -\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)$$

2) Richtig oder falsch: V sei der Vektorraum aller stetiger Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) = \int_2^3 f(t)\,dt$ linear.

Lösung: *Richtig,* denn $\int_2^3 \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_2^3 f(t)\,dt + \mu \int_2^3 g(t)\,dt\,.$

3) Richtig oder falsch: V sei der Vektorraum aller reeller $n \times n$-Matrizen. Dann ist die Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(A) = \det A$ linear.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist für $n \geq 2$ und die Einheitsmatrix E
$$\det(E + E) = 2^n \neq 2 = \det E + \det E\,.$$

4) Richtig oder falsch: Ist das Produkt AB zweier $n \times n$-Matrizen A, B gleich der Nullmatrix, so hat mindestens eine der beiden Matrizen Determinante null.

Lösung: *Richtig,* denn dann ist $\det(AB) = \det A \det B = 0$.

5) Richtig oder falsch: Es gibt keine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f = \binom{y^2}{x^2}$.

Lösung: *Richtig,* denn gäbe es eine solche Funktion F, so wäre $F_x = y^2$ und $F_y = x^2$; da beides stetig differenzierbar ist, müßten auch $F_{xy} = 2y$ und $F_{xy} = 2x$ übereinstimmen.

6) Richtig oder falsch: Die Jacobi-Matrix eines zweimal stetig differenzierbaren Vektorfelds ist symmetrisch.

Lösung: *Falsch;* für $\vec{V}(x, y) = \binom{x^2}{xy}$ ist $J_{\vec{V}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ nicht symmetrisch.

7) Was ist $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ y^2-z^2 \\ z^2-x^2 \end{pmatrix}$?

Lösung:

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ y^2-z^2 \\ z^2-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z^2-x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2-z^2) \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2-y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2-x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2-z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix} .$$

8) Berechnen Sie, für $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2/9 = 1\right\}$, das Integral $\iint\limits_G dx\,dy$!

Lösung: G ist eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{4} = 2$ und $\sqrt{9} = 3$, und das Integral ist der Flächeninhalt $2 \cdot 3 \cdot \pi = 6\pi$ von G.

9) Berechnen Sie für dasselbe G auch $\iint\limits_G x\,dx\,dy$!

Lösung: Da x eine ungerade Funktion ist und G symmetrisch zur y-Achse liegt, verschwindet das Integral.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

V sei der von $\left\{x^5+1, x^5-1, x^3+1, x^3-1, x+1, x-1\right\}$ erzeugte Untervektorraum des Vektorraums aller reeller Polynome.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V und berechnen Sie $\dim V$!

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto f'' - f \end{cases}$ ist linear.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ!

d) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von φ!

e) Welche Dimension hat das Bild von φ?

Lösung:

a) V enthält das Polynom

$$1 = \frac{1}{2}\big((x+1) - (x-1)\big)$$

und somit auch die Polynome x, x^3 und x^5. Alle Erzeugenden und damit auch jedes Element von V ist Linearkombination der vier Polynome $1, x, x^3, x^5$; diese sind linear unabhängig, denn

$$\lambda \cdot 1 + \mu x + \nu x^3 + \rho x^5$$

ist genau dann das Nullpolynom, wenn alle vier Koeffizienten verschwinden.

Somit ist $\{1, x, x^3, x^5\}$ eine Basis und $\dim V = 4$.

b) Differentiation ist immer linear; es geht also nur darum, daß $f'' - f$ für jede Funktion $f \in V$ wieder in V liegt. Wegen der Linearität von φ reicht es, das für die Basiselemente nachzurechnen:

$$\frac{d^2}{dx^2}1 - 1 = -1 \in V$$
$$\frac{d^2}{dx^2}x - x = -x \in V$$
$$\frac{d^2}{dx^2}x^3 - x^3 = 6x - x^3 \in V$$
$$\frac{d^2}{dx^2}x^5 - x^5 = 20x^3 - x^5 \in V$$

c) In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren, ausgedrückt durch ihre Koeffizienten. Also ist die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

d) Für ein Polynom aus dem Kern ist $f'' = f$. Da f'' für jedes nichtverschwindende Polynom echt kleineren Grad als f hat, liegt nur das Nullpolynom im Kern; dessen Basis ist somit die leere Menge.

e) Nach der Dimensionsformel ist

$$\dim \operatorname{Kern} \varphi + \dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V = 4 ,$$

also ist $\dim \operatorname{Bild} \varphi = 4 - 0 = 4$. (Die Abbildung ist surjektiv, tatsächlich sogar bijektiv.)

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + \ y - \ z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ (a-1)y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Subtraktion von zweimal der ersten Gleichung von der zweiten macht die letzten beiden Gleichungen zu

$$y + (a+2)z = 1 \quad \text{und} \quad (a-1)y + 4z = 1 .$$

Subtraktion von $(a-1)$-mal der linken Gleichung von der rechten führt auf

$$\big(4 - (a+2)(a-1)\big)z = 2 - a .$$

Ausmultiplizieren zeigt, daß

$$4 - (a+2)(a-1) = -(a^2 + a - 6)$$

ist, und das verschwindet für $a = 2$ und $a = -3$.
Für $a = 2$ wird die Gleichung somit zu $0z = 0$, was keinerlei Bedingung an z stellt; für $a = -3$ erhält man die unlösbare Gleichung $0z = 5$. Für $a = -3$ ist das Gleichungssystem daher unlösbar.
Für $a \notin \{2, -3\}$ können wir durch den Koeffizienten von z dividieren und erhalten

$$z = \frac{2-a}{-(a-2)(a+3)} = \frac{1}{a+3} .$$

Einsetzen in die Gleichung $y + (a+2)z = 1$ zeigt, daß dann

$$y = 1 - (a+2)z = 1 - \frac{a-2}{a+3} = \frac{1}{a+3}$$

ist, also insbesondere $y = z$, und somit zeigt die erste Gleichung des Systems, daß $x = 1$ ist.
Für $a = 2$ ist z beliebig, und die Gleichung $y + (a+2)z = 1$ zeigt, daß $y = 1 - 4z$ ist. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$x = 1 - y + z = 1 - 1 + 4z + z = 5z .$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a &= \left\{ \left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right) \right\} \quad \text{für } a \notin \{2, -3\} \\
\mathcal{L}_2 &= \left\{ (5z, 1-4z, z) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathcal{L}_{-3} &= \emptyset\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ x \\ -x \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -x \\ x \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Lösung: Die vier Vektoren sind genau dann linear *abhängig,* wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 & -4 \\ -2 & x & -x & 3 \\ 3 & -x & x & -2 \\ -4 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Deren Wert ändert sich nicht, wenn man die dritte Spalte durch die Summe aus zweiter und dritter Spalte ersetzt; die Determinante wird dadurch zu

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & -4 \\ -2 & x & 0 & 3 \\ 3 & -x & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & x & 3 \\ 3 & -x & -2 \\ -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -2 & x & 3 \\ 3 & -x & -2 \end{vmatrix},$$

wobei die rechte Seite der Gleichung die Entwicklung der Determinante nach ihrer dritten Spalte ist.
Die beiden Determinanten rechts werden etwas einfacher, wenn man jeweils die beiden Zeilen, in denen x vorkommt, zueinander adddiert und eine der beiden durch die Summe ersetzt; die Determinante ist also auch gleich

$$-\begin{vmatrix} -2 & x & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -2 & x & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Diese beiden Determinanten kann man nun beispielsweise jeweils nach der Zeile 1 0 1 entwickeln, was zum Ergebnis

$$\begin{gathered}
\begin{vmatrix} x & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & x \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ x & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & x \end{vmatrix} \\
= (x+18) + (12+4x) + (15+4x) + (x+10) = 10x + 55
\end{gathered}$$

führt.
Die vier Vektoren sind somit genau dann linear unabhängig, wenn $10x + 55$ nicht verschwindet, wenn also $x \neq -5\frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Der Vektorraum V bestehe aus allen reellen Polynomen der Form

$$a + bx^2 + cx^5 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

a) Zeigen Sie: Durch $(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Bestimmen Sie eine Ortho*gon*albasis von V bezüglich dieses Skalarprodukts!

Lösung:

a) Natürlich ist (f, g) bilinear und symmetrisch. Außerdem ist aus der Vorlesung bekannt, daß $(f, f) = \int_0^1 f(x)^2\,dx$ für eine stetige Funktion nur verschwindet, wenn f auf $[0, 1]$ identisch verschwindet, was für kein Polynom außer dem Nullpolynom der Fall ist. Somit ist durch $(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx$ ein Skalarprodukt definiert.

b) Wir konstruieren die Orthogonalbasis nach Gram-Schmidt, ausgehend von der Basis $\{1, x^2, x^5\}$:
Als ersten Basisvektor behalten wir $\vec{b}_1 = 1$, für den zweiten machen wir den Ansatz

$$\vec{b}_2 = x^2 - \lambda \cdot 1 \quad \text{mit} \quad (\vec{b}_2, 1) = 0\,.$$

Mit

$$(1, 1) = \int_0^1 1\,dx = 1 \quad \text{und} \quad (1, x^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

folgt sofort, daß $\lambda = 1/3$ sein muß, d.h.

$$\vec{b}_2 = x^2 - \frac{1}{3}\,.$$

Für $\vec{b}_3$ machen wir entsprechend den Ansatz

$$\vec{b}_3 = x^5 - \lambda \cdot 1 - \mu\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\ ;$$

wegen

$$(x^5, 1) = \int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{6}, \quad \left(x^5, x^2 - \frac{1}{3}\right) = \int_0^1 \left(x^7 - \frac{x^5}{3}\right)dx = \frac{1}{8} - \frac{1}{18} = \frac{5}{72}$$

und

$$\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right) = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$$

muß

$$\lambda = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{5}{72} : \frac{4}{45} = \frac{5 \cdot 45}{72 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 8} = \frac{25}{32}$$

gesetzt werden. Also ist

$$\vec{b}_3 = x^5 - \frac{1}{6} - \frac{25}{32}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^5 - \frac{25}{32}x^2 - \frac{1}{6} + \frac{25}{96} = x^5 - \frac{25}{32}x^2 + \frac{3}{32}$$

der dritte Basisvektor.

Eine Orthogonalbasis ist also beispielsweise

$$\left\{1, x^2 - \frac{1}{3}, x^5 - \frac{25}{32}x^2 + \frac{3}{32}\right\} .$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

Das Kurvenstück γ sei definiert durch die Abbildung $\gamma\colon \begin{cases} [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (3t, 4\cos t, 4\sin t) \end{cases}$.

a) Beschreiben Sie das Bild von γ geometrisch!

b) Berechnen Sie die Länge dieses Kurvenstücks!

Lösung:

a) Die zweite und dritte Koordinate, für sich alleine betrachtet, beschreiben einen Kreis, der zehnmal durchlaufen wird. Die erste Koordinate sorgt dafür, daß dieser Kreis zu einer Spirale auseinandergezogen wird, die pro Windung eine Höhe von 6π hat.

b) Die Länge ist

$$\int_0^{20\pi} |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_0^{20\pi} \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4\sin t \\ 4\cos t \end{pmatrix}\right| dt = \int_0^{20\pi} \sqrt{3^2 + 4^2\sin^2 t + 4^2\cos^2 t}\,dt$$
$$= \int_0^{20\pi} \sqrt{3^2+4^2}\,dt = \int_0^{20\pi} 5\,dt = 100\pi .$$

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) In welchen Punkten kann die Gleichung

$$F(x,y) = \sin(x+y) - y\cos(x+y) = 0$$

nicht lokal eindeutig nach y aufgelöst werden?

b) Bestimmen Sie für alle anderen Lösungen (x,y) die Ableitung der auflösenden Funktion $y = f(x)$!

Lösung:

a) Das sind genau die Punkte, in denen außer F auch die partielle Ableitung F_y verschwindet.

$$F_y(x,y) = \cos(x+y) + y\sin(x+y) - \cos(x+y) = y\sin(x+y)$$

verschwindet genau dann, wenn entweder y verschwindet oder $\sin(x+y)$; letzteres ist gleichbedeutend damit, daß $x+y$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist und somit ist in diesen Punkten $\cos(x+y) = \pm 1$ und $F(x,y) = \pm y$.

Die einzigen Punkte, in denen $F(x,y)$ und $F_y(x,y)$ beide verschwinden, sind also die mit $y = 0$; da für diese $F(x,0) = \sin x$ ist, kann man die Gleichung genau in den Punkten

$$(k\pi, 0) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

nicht nach y auflösen.

b) Dort, wo f (eindeutig) definiert ist, gilt

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{\cos(x+y) + y\sin(x+y)}{y\sin(x+y)} = \frac{-1}{y\tan(x+y)} - 1 .$$

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von

$$f(x,y) = e^{\sin x \cdot \cos y}$$

um den Nullpunkt! *(Hinweis:* Es schadet nie, wenn Sie sich vergewissern, daß dieses Polynom an der Stelle $(0,0)$ den Wert $f(0,0)$ annimmt!*)*

Lösung: Zunächst ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \textit{höhere Terme} \quad \text{und} \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \textit{höhere Terme}\,,$$

also

$$\sin x \cdot \cos y = x - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + \textit{höhere Terme}\,.$$

Dies wird als Argument in die Exponentialreihe

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \textit{höhere Terme}$$

eingesetzt, wobei alle Summanden vom Gesamtgrad größer vier vernachlässigt werden können. Somit ist

$$\begin{aligned} z &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + \textit{höhere Terme}\,, \\ z^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2y^2 + \textit{höhere Terme}\,, \\ z^3 &= x^3 + \textit{höhere Terme} \quad \text{und} \\ z^4 &= x^4 + \textit{höhere Terme}\,. \end{aligned}$$

Das gesuchte TAYLOR-Polynom vierten Grades ist also

$$\begin{aligned} &1 + \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^2y^2}{2}\right) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^2y^2}{2}\,. \end{aligned}$$