WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

28. Oktober 2000

Nachklausur und 13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die ungeraden Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* V sei der Vektorraum aller stetiger Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $\varphi: V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) = \int_2^3 f(t)\,dt$ linear.

3) *Richtig oder falsch:* V sei der Vektorraum aller reeller $n \times n$-Matrizen. Dann ist die Abbildung $\varphi: V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(A) = \det A$ linear.

4) *Richtig oder falsch:* Ist das Produkt AB zweier $n \times n$-Matrizen A, B gleich der Nullmatrix, so hat mindestens eine der beiden Matrizen Determinante null.

5) *Richtig oder falsch:* Es gibt keine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f = \binom{y^2}{x^2}$.

6) *Richtig oder falsch:* Die JACOBI-Matrix eines zweimal stetig differenzierbaren Vektorfelds ist symmetrisch.

7) Was ist $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix}$?

8) Berechnen Sie, für $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2/9 = 1\right\}$, das Integral $\iint_G dx\,dy$!

9) Berechnen Sie für dasselbe G auch $\iint_G x\,dx\,dy$!

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*
V sei der von $\left\{x^5 + 1, x^5 - 1, x^3 + 1, x^3 - 1, x + 1, x - 1\right\}$ erzeugte Untervektorraum des Vektorraums aller reeller Polynome.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V und berechnen Sie $\dim V$!

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi: \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto f'' - f \end{cases}$ ist linear.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ!

d) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von φ!

e) Welche Dimension hat das Bild von φ?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ (a-1)y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ x \\ -x \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -x \\ x \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Der Vektorraum V bestehe aus allen reellen Polynomen der Form

$$a + bx^2 + cx^5 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

a) Zeigen Sie: Durch $(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.
b) Bestimmen Sie eine Ortho*gon*albasis von V bezüglich dieses Skalarprodukts!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Das Kurvenstück γ sei definiert durch die Abbildung $\gamma\colon \begin{cases} [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \quad t \mapsto (3t, 4\cos t, 4\sin t) \end{cases}$.
a) Beschreiben Sie das Bild von γ geometrisch!
b) Berechnen Sie die Länge dieses Kurvenstücks!

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*
a) In welchen Punkten kann die Gleichung

$$F(x, y) = \sin(x + y) - y\cos(x + y) = 0$$

nicht lokal eindeutig nach y aufgelöst werden?
b) Bestimmen Sie für alle anderen Lösungen (x, y) die Ableitung der auflösenden Funktion $y = f(x)$!

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von

$$f(x, y) = e^{\sin x \cdot \cos y}$$

um den Nullpunkt! *(Hinweis:* Es schadet nie, wenn Sie sich vergewissern, daß dieses Polynom an der Stelle $(0, 0)$ den Wert $f(0, 0)$ annimmt!*)*