Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

27. September 2000

Modulklausur Höhere Mathematik I

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(3) = f(-3)$ bilden einen Vektorraum.

Lösung: *Richtig:* Sind f, g zwei solche Funktionen, so ist für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch $\lambda f + \mu g$ stetig, und

$$(\lambda f + \mu g)(3) = \lambda f(3) + \mu g(3) = \lambda f(-3) + \mu g(-3) = (\lambda f + \mu g)(-3)\,.$$

2) Richtig oder falsch: Eine $n \times n$-Matrix A mit $A^2 = 0$ hat Determinante null.

Lösung: *Richtig:* Nach dem Multiplikationssatz für Determinanten ist $\det A^2 = (\det A)^2 = 0$, also auch $\det A = 0$.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Niveaulinien einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konzentrische Kreise (oder deren Mittelpunkt) sind, hängt die Funktion, in Polarkoordinaten geschrieben, nur vom Radius r ab.

Lösung: *Falsch,* denn die Kreise müssen nicht den Koordinatenursprung als Mittelpunkt haben. Gegenbeispiel:

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \Longrightarrow F(r,\varphi) = r^2 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi) + 2\,.$$

4) Was ist $\iiint_{\mathcal{K}} x\,dx\,dy\,dz$ für $\mathcal{K} = \left\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| \le 3 \wedge y^2 + z^2 \le 100\right\}$?

Lösung: *Null,* denn der Integrationsbereich ist symmetrisch zur yz-Ebene und der Integrand x ändert sein Vorzeichen bei Spiegelung an dieser Ebenen.

5) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$?

Lösung: *Null,* denn $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V}(x,y,z)$ verschwindet für jedes Vektorfeld.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Lösung: Subtraktion von zweimal *bzw.* einmal der ersten Gleichung von der dritten macht die letzten beiden Gleichungen zu

$$y + (a+2)z = 1 \quad \text{und} \quad (a-1)y + 4z = 1 \,.$$

Subtraktion von $(a-1)$-mal der linken Gleichung von der rechten führt auf

$$\big(4 - (a+2)(a-1)\big)z = 2 - a \,.$$

Ausmultiplizieren zeigt, daß

$$4 - (a+2)(a-1) = -(a^2 + a - 6)$$

ist, und das verschwindet für $a = 2$ und $a = -3$.
Für $a = 2$ wird die Gleichung somit zu $0z = 0$, was keinerlei Bedingung an z stellt; für $a = -3$ erhält man die unlösbare Gleichung $0z = 5$. Für $a = -3$ ist das Gleichungssystem daher unlösbar.
Für $a \notin \{2, -3\}$ können wir durch den Koeffizienten von z dividieren und erhalten

$$z = \frac{2-a}{-(a-2)(a+3)} = \frac{1}{a+3} \,.$$

Einsetzen in die Gleichung $y + (a+2)z = 1$ zeigt, daß dann

$$y = 1 - (a+2)z = 1 - \frac{a-2}{a+3} = \frac{1}{a+3}$$

ist, also insbesondere $y = z$, und somit zeigt die erste Gleichung des Systems, daß $x = 1$ ist.
Für $a = 2$ ist z beliebig, und die Gleichung $y + (a+2)z = 1$ zeigt, daß $y = 1 - 4z$ ist. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$x = 1 - y + z = 1 - 1 + 4z + z = 5z \,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a &= \left\{ \left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right) \right\} \quad \text{für } a \notin \{2, -3\} \\ \mathcal{L}_2 &= \big\{ (5z, 1-4z, z) \bigm| z \in \mathbb{R} \big\} \\ \mathcal{L}_{-3} &= \emptyset \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei erzeugt von den Funktionen $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

Lösung: Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, kann zur Erzeugung auf eine der drei Funktionen verzichtet werden, etwa auf $\cos^2 x$. Die restlichen Funktionen sind dann linear unabhängig: Ist nämlich

$$\lambda + \mu \sin x + \nu \cos x + \rho \sin^2 x + \sigma \sin x \cos x = 0 \,,$$

so zeigen die Spezialfälle $x = 0$ und $x = \pi$, für die $\sin x$ verschwindet, daß $\lambda + \nu = \lambda - \nu = 0$ ist, also $\lambda = \nu = 0$.
Für $x = \pm\pi/2$ verschwindet $\cos x$ und $\sin x = \pm 1$; wir erhalten

$$\mu + \rho = -\mu + \rho = 0, \quad \text{also} \quad \mu = \rho = 0 \,.$$

Dann muß aber auch σ verschwinden, denn $\sin x \cos x$ ist nicht identisch null. Somit sind diese fünf Funktionen linear unabhängig und bilden eine Basis von V.

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto f'' + 4f$ definiert eine lineare Abbildung $V \to V$.

Lösung: Die Linearität in f ist ziemlich klar, da Differentiation eine lineare Operation ist: Für zwei differenzierbare Funktionen f, g und zwei reelle Zahlen λ, μ ist

$$(\lambda f + \mu g)'' + 4(\lambda f + \mu g) = \lambda(f'' + 4f) + \mu(g'' + 4g)\,.$$

Zum Nachweis, daß die Vorschrift $\varphi(f) = f'' + 4f$ überhaupt eine Abbildung von V nach V definiert reicht es daher, $\varphi(f)$ für die Elemente der Basis zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 4 \in V \\
\varphi(\sin x) &= -\sin x + 4\sin x = 3\sin x \in V \\
\varphi(\cos x) &= -\cos x + 4\cos x = 3\cos x \in V \\
\varphi(\sin^2 x) &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sin^2 x = 2 \in V \\
\varphi(\sin x\cos x) &= -4\sin x\cos x + 4\sin x\cos x = 0 \in V
\end{aligned}$$

Somit ist φ eine lineare Abbildung von V nach V.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser linearen Abbildung bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; da diese Bilder in *b)* berechnet wurden, können sie einfach eingesetzt werden; die Matrix wird zu

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild dieser linearen Abbildung!

Lösung: Das Bild wird von den drei Basisvektoren $1, \sin x, \cos x$ aufgespannt und ist somit dreidimensional. Nach der Dimensionsformel hat daher der Kern die Dimension $5-3=2$.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) mit $x^2 + y^2 \le 1$, in denen der Gradient von $f(x, y) = \sin^2(x+y) + \cos^2(x-y)$ der Nullvektor ist!

Lösung: Der Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x+y)\cos(x+y) + 2\sin(x-y)\cos(x-y) \\ 2\sin(x+y)\cos(x+y) - 2\sin(x-y)\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn

$$\sin(x+y)\cos(x+y) = \sin(x-y)\cos(x-y) = 0$$

ist. Die Funktion $\sin u \cos u$ verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von $\pi/2$, der Gradient ist also genau dann gleich dem Nullvektor, wenn es ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß

$$x + y = k\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x - y = \ell\frac{\pi}{2}$$

ist. x und y sind dann ganzzahlige Vielfache von $\pi/4$, deren Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi/2$ sein muß. Da $\pi/4$ zwischen $3/4$ und 1 liegt, sind

$$(0,0) \quad \text{und} \quad \left(\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{4}\right)$$

die einzigen fünf solche Punkte in der Einheitskreisscheibe.

b) Berechnen Sie Δf !

Lösung:

$$\Delta f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 4\cos^2(x+y) - 4\sin^2(x+y) + 4\sin^2(x-y) - 4\cos^2(x-y)\,.$$

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Kurve $\gamma\colon [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t\big)$ geometrisch!

Lösung: Dies ist eine Spirale mit fünf Windungen; ihr Radius ist eins, ihre Höhe 10π.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge von γ !

Lösung: Die Bogenlänge ist

$$\int_0^{10\pi} |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \int_0^{10\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt = \int_0^{10\pi} \sqrt{2}\,dt = 10\sqrt{2}\,\pi\,.$$